Úlohy ke cvičení

Definice 1. Jako *relaci* R nazveme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $X \times Y$. Neboli $R \subseteq X \times Y$. Pokud $X = Y$, pak o R hovoříme jako o *relaci na* X. Místo $(x, y) \in R$ často píšeme xRy. Relací R^{-1} rozumíme $R^{-1} = \{(x, y); (y, x) \in R\}$.

Definice 2. Relace $f \subseteq X \times Y$ se nazývá *zobrazení*, pokud pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$ takové, že xfy. Takové y značíme $f(x)$. Zobrazení pak značíme $f\colon X \to Y$.

Definice 3. Zobrazení $f\colon X \to Y$ se nazývá

- *prosté (injektivní)*, pokud $f(x_1) = f(x_2)$ implikuje $x_1 = x_2$,
- *na (surjektivní)*, pokud pro každé $y \in Y$ existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = y$,
- *vzájemně jednoznačné (bijektivní)*, pokud je prosté a na.

Úloha 1. Mějme 9 mincí a rovnoramenné váhy. Právě jedna z mincí je falešná, což se pozná tak, že je lehčí. Jak na co nejmenší počet vážení odhalit onu falešnou minci?

Úloha 2. Zjistěte, které z následujících podmínek nejsou ekvivalentní podmínce $A \subseteq B$. Pokuste se ji upravit tak, aby ekvivalence platila a to pokud možno co nejmenším zásahem.

a) $A \setminus B = \emptyset$

b) $A \cup B = B$

c) $A \cap B = A$

d) $\overline{A} \setminus B \subseteq \overline{B}$

e) $A \cap \overline{B} = \emptyset$

f) $\overline{A} \subseteq \overline{B}$

Úloha 3. Buďte X, Y konečné množiny takové, že $|X| \leq |Y|$.

a) Určete počet všech zobrazení $f\colon X \to Y$.

b) Určete počet prostých zobrazení $f\colon X \to Y$.

c) Určete počet vzájemně jednoznačných zobrazení $f\colon X \to X$.

Úloha 4. Najděte

a) bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$,

b) bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}^2$,

c) prosté zobrazení z $\mathbb{Q}$ do $\mathbb{N}$. (Nebo dokonce zkonstruujte bijekci.)