

Úlohy ke cvičení

Věta 1. Pro každý graf $G(V, E)$ platí $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$, kde $\deg(v)$ označuje stupeň vrcholu v .

Jako důsledek dostáváme, že každý graf má sudý počet vrcholů lichého stupně.

Definice 2. Graf se nazývá *strom*, pokud je souvislý a neobsahuje cyklus jako podgraf.

Kostra grafu je jeho podgraf na všech jeho vrcholech, který je stromem.

Věta 3. Graf je rovinný právě tehdy, když neobsahuje podrozdelení $K_{3,3}$ ani K_5 jako podgraf.

Věta 4. Je-li $G = (V, E)$ rovinný graf s alespoň 3 vrcholy, pak $|E| \leq 3|V| - 6$. Pokud navíc G neobsahuje trojúhelník jako podgraf, pak platí $|E| \leq 2|V| - 4$.

Věta 5. Buď $G = (V, E)$ rovinný graf a s označuje počet jeho stěn. Pak platí $|V| - |E| + s = 2$.

Úloha 1. Mějme strom, který má $l > 0$ listů a i vnitřních vrcholů, přičemž každý vnitřní vrchol má stupeň 3. Dokažte, že vždy platí $l = i + 2$.

Úloha 2. Určete počet koster grafu $K_{2,n}$.

Úloha 3. Najděte rovinný graf, který má stupně všech vrcholů 5.

Úloha 4. Nakreslete K_5 , K_6 na torus.

Úloha 5. Dokažte, že doplněk rovinného grafu s 11 vrcholy nemůže být rovinný.

Úloha 6. Dokažte, že odhad $|E| \leq 2|V| - 4$ pro rovinné grafy bez trojúhelníku je nejlepší možný.