4. DÚ

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{1-x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{1-x}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}}}{\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}=1$$

$$\arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$$

$\frac{2x}{x^2+1}$ má globální extrémy ± 1 v ± 1

def. obor $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty}\arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)=\arcsin(0)=0$$

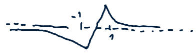
$$\lim_{x\to\infty}\quad -\| - \quad = 0$$

osa x je asymptota v obou směrech

---

1. derivace $\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2}}$

derivace není v $-1, 1$



– průsečík s osou x i y je v počátku

2. derivace

$$\frac{-4x(x^2+1)-4x(-2x^2+2)}{(x^2+1)^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2}}+\frac{\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\left(\frac{-2x^2+2}{x^2+1}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2\right)^{2/3}}$$

$-1, 1, 0$ jsou inflexní body

$(-\infty,-1)$ konkávní $(-1,0)$ konvexní, $(0,1)$ konkávní, $(1,\infty)$ konvexní

$e^x\geq 1+x$ $\quad 1+x$ je tečna v $(0,1)$ + e^x je konvexní

---

mějme obsah S, chceme obdélník, který minimalizuje obvod o při obsahu S

$$o=2\left(a+\frac{S}{a}\right)$$

chceme minimalizovat, stačí minimalizovat $a+\frac{S}{a}$

zderivujeme

$$\left(a+\frac{S}{a}\right)'=1-\frac{S}{a^2},\ 0 \text{ v } a=\pm\sqrt{S}$$

v $\sqrt{S}$ je minimum => obdélník minimalizující obvod při daném obsahu je čtverec

---

$f(x)=\sqrt{1+x}$ chceme Taylorův polynom stupně 5 „se středem v 0"

spočítáme derivace

$$\frac{1}{2\sqrt{1+x}},\ -\frac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}},\ \frac{3}{8\sqrt{(1+x)^5}},\ -\frac{15}{16\sqrt{(1+x)^7}},\ \frac{105}{32\sqrt{(1+x)^9}}$$

$$1+\frac{1}{2}x-\frac{\frac{1}{4}}{2!}x^2+\frac{\frac{3}{8}}{3!}x^3-\frac{\frac{15}{16}}{5!}x^4+\frac{\frac{105}{32}}{5!}x^5=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\frac{7}{256}x^5$$

chceme odhadnout $\sqrt{1{,}02}$

dosadíme do Taylora polynomu stupně 3

$$\sqrt{1{,}02}\approx 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{100}-\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{10000}+\frac{1}{16}\cdot\frac{8}{1000000}=1+\frac{1}{100}-\frac{1}{20000}+$$
$$+\frac{1}{2000000}=1{,}0099505$$

$$\left|R_3^{f,0}\left(\tfrac{2}{100}\right)\right|=\left|f\left(\frac{2}{100}\right)-T_3^{f,0}\left(\frac{2}{100}\right)\right|$$

$\exists c\in(0;0{,}02);$

$$\left|R_3^{f,0}(0{,}02)\right|=\left|\frac{\left(\sqrt{1+c}\right)^{(4)}}{4!}\left(\frac{2}{100}-0\right)^4\right|=$$

$$=\left|\frac{\frac{-15}{16(1+c)^{\frac{7}{2}}}}{4!}\left(\frac{2}{100}\right)^4\right|\leq\frac{1}{4!}\cdot\frac{16}{100000000}\leq\frac{1}{1000000000}$$