2. DÚ

1. $a_n \to +\infty$ CÍL $a_n b_n \to \infty$

$b_n \to B \in \mathbb{R}^+$

MĚJME C

PRO $\frac{B}{2}$ $\exists\, l_0 ;\ \forall n \geq l_0 : \left| b_n - \frac{B}{2} \right| < \frac{B}{2} \Rightarrow b_n > \frac{B}{2}$

PRO $\frac{2}{B}C$ $\exists\, n_0 ;\ \forall n \geq n_0 : a_n > \frac{2}{B}C$

ZVOLÍME $n_0 := \max(l_0, n_0)$, POTOM $\forall n \geq n_0$ $a_n b_n > \frac{2}{B}C \cdot \frac{B}{2} = C$

$a_1 = 0$

$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - a_n\right)^2$

? $a_n \to A$?

$A = A + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - A\right)^2$

$\Rightarrow A = \frac{1}{3}$

$a_1 = 1$

$a_{n+1} = -a_n$

$1, -1, 1, -1, 1, -1$

$\cancel{A = -A}$

$\cancel{\Rightarrow A = 0}$

CHCEME $a_n \leq \frac{1}{3}$

INDUKCE

$a_1 = 0 < \frac{1}{3}$ ✓

1. PŘ. $a_n \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{3} - a_n\right) < 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3} - a_n\right)^2 \leq \frac{1}{3} - a_n$

$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - a_n\right)^2 \leq a_n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - a_n\right) = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{6} \leq$

$\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

POTENCIÁLNÍ NÁHRADNÍ CVIČENÍ

PÁTEK 14:00 23. 4., PONDĚLÍ V 9:00 26. 4.

---

1. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{\sqrt{n^3+3n^2}}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\sqrt{x^3+3x^2}} = \lim\limits_{x \to \infty} e^{\sqrt{x^3+3x^2} \cdot \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}$

VNITŘNÍ FCE

VNĚJŠÍ FCE e^x - SPOJITÁ

$\Rightarrow$ VOLSF JE OK

POČÍTÁME

$\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^3+3x^2} \cdot \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^3+3x^2} \cdot \ln\left(1 + \frac{x^2+1}{x^2-1} - \frac{x^2-1}{x^2-1}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^3+3x^2} \cdot \underbrace{\frac{\ln\left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right)}{\frac{2}{x^2-1}}}_{\to 1} \cdot \frac{2}{x^2-1} = 0$

POZN. ZNÁMÉ LIMITY

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

// $\frac{2}{x^2-1} > 0$

$\Rightarrow$ VOLSF V

PRO VNĚJŠÍ $\frac{\ln(1+x)}{x}$

VNITŘNÍ $\frac{2}{x^2-1}$

ZBÝVÁ VYŘEŠIT $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2\sqrt{x^3+3x^2}}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{o(x^2)}{x^2-1} \to 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\sqrt{x^3+3x^2}} = e^0 = 1$

HEINE - VEZMEME POSL. $x_n = n$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{\sqrt{n^3+3n^2}} = 1$

$M \subseteq \mathbb{R}^d$ JE OTEVŘENÁ $\forall x \in M\ \exists \delta ;\ U(x, \delta) \subseteq M$

$M \subseteq \mathbb{R}^d$ JE UZAVŘENÁ, POKUD $\mathbb{R}^d \setminus M$ JE OTEVŘENÁ

$\emptyset$ JE OTEVŘENÁ $\Rightarrow \mathbb{R}^d \setminus \emptyset = \mathbb{R}^d$ JE UZAVŘENÁ

$\mathbb{R}^d$ JE OTEVŘENÁ $\Rightarrow \emptyset$ JE UZAVŘENÁ

„CLOPEN"

$M_1, \dots, M_n$ JSOU OTEVŘENÉ $\bigcap\limits_{i=1}^{n} M_i$

M_i JE OTEVŘENÁ $\Rightarrow \forall x \in M_i\ \exists \delta_i ;\ U(x, \delta_i) \subseteq M_i$

PRO $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} M_i$ VEZMEME $\min(\delta_i, i = 1 \dots n\}$ $\Rightarrow U(x, \delta_i) \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} M_i$

PRO NEKONEČNÝ PRŮNIK TO OBECNĚ NEPLATÍ

$M_n := \left(2 - \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}\right)$ $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} M_n = [2, 3]$

ALE LIBOVOLNÉ SJEDNOCENÍ OTEVŘENÝCH MNOŽIN JE OTEVŘENÁ MNOŽINA

PRO UZAVŘENÉ MNOŽINY TO PLATÍ OPAČNĚ

$\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \left[2 + \frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}\right] = (2, 3)$

DERIVACE

$f: M \to \mathbb{R}$, $b \in M$ A $U(b, \delta) \subseteq M$

DERIVACE V BODĚ b

$f'(b) := \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} = \lim\limits_{x \to b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$

$a = \frac{dv}{dt}$