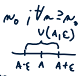
POSLOUPNOST

ZOBRAZENÍ $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$a(n)$ ZNAČÍME a_n

POSLOUPNOST $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ MÁ LIMITU $A \in \mathbb{R}^*$, POKUD $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0;\ \forall n \geq n_0: a_n \in U(A,\varepsilon)$

ZNAČÍME $\lim_{n\to\infty} a_n = A$



PRO $A=\infty$ $\left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$

ARITMETIKA LIMIT

$(a_n), (b_n)$; $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}^*$. PAK

1. $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$, MLPSS
2. $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = AB$, MLPSS
3. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$, POKUD $b_n \neq 0$ PRO KAŽDÉ $n \geq n_0$ A MLPSS

PRO KAŽDÉ $k \in \mathbb{R}^*$ NAJDĚTE POSLOUPNOSTI $(a_n), (b_n)$ S LIMITAMI $a_n \to \infty$, $b_n \to -\infty$, ALE $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = k$.

$a_n = \frac{k}{2} + n$ $\qquad a_n + b_n = \frac{k}{2} + \frac{k}{2} + n - n = k$

$b_n = \frac{k}{2} - n$

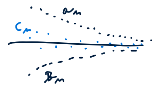
$a_n = 2n$ $\qquad a_n + b_n = 2n - n = n \to \infty$

$b_n = -n$

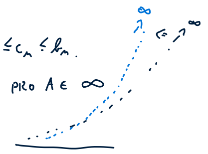
VĚTA O 2 POLICAJTECH

$(a_n), (b_n), (c_n)$; $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq n_0$ $a_n \leq c_n \leq b_n$.

POTOM $\lim_{n\to\infty} c_n = A$.



PRO $A \in \infty$



---

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^5 + 3n - 2}{n^5 - 3n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^5 + 3n - 2}{n^5 - 3n^3} \cdot \frac{\frac{1}{n^5}}{\frac{1}{n^5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{3}{n^4} - \frac{2}{n^5}}{1 - \frac{3}{n^2}} = \frac{2+0-0}{1-0} = 2$

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

$0 < \underbrace{\frac{n}{n}}_{=1} \cdot \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{<1} \cdot \underbrace{\frac{n-2}{n}}_{<1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{2}{n}}_{<1} \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \to 0$ VĚTA O 2 POLICAJTECH

$0 \to 0$

3. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$ $\qquad n^2 \leq 2^n$ PRO $n \geq 4$

$0 \leq \frac{n}{2^n} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ VĚTA O 2 POLICAJTECH

PRO $n \geq 4$

4. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 1$ Z PŘEDNÁŠKY VÍME $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$1 \leq \sqrt[n]{3} \leq \sqrt[n]{n}$ 2 POLICAJTI

5. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n} = 3$

$3 \leq \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 3^n + 3^n} = 3\underbrace{\sqrt[n]{3}}_{\to 1} \to 3$

POSLOUPNOST JE NEOMEZENÁ SHORA $\Leftarrow$ POSLOUPNOST MÁ LIMITU $+\infty$ $\qquad (-1)^n n$ NEMÁ LIMITU

SPOČTĚTE LIMITU POSLOUPNOSTI

$a_1 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 4}$

PŘEDPOKLÁDÁME, ŽE MÁ VLASTNÍ LIMITU A, POTOM MUSÍ PLATIT $A = \sqrt{A+4}$

$A^2 = A + 4 \iff A^2 - A - 4 = 0$ $\qquad \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$

POSLOUPNOST JE KLADNÁ $\Rightarrow$ A MUSÍ BÝT $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}$.

ZATÍM UMÍME ŘÍCT, ŽE POKUD POSLOUPNOST MÁ LIMITU, PAK JE TO $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}$

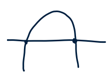
DOKÁŽEME, ŽE (a_n) JE OMEZENÁ SHORA

$a_n < A$

$n = 1$ ✓

$n > 1$:

$a_n = \sqrt{a_{n-1} + 4} < \sqrt{A+4} = A$ ✓



ROSTOUCÍ

$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 4} > a_n$ $\qquad a_n + 4 > a_n^2$

PLATÍ PRO $a_n \in \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}\right)$

MY VÍME, ŽE $a_n \in \left(0, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}\right)$ ✓

$\Rightarrow (a_n)$ JE OMEZENÁ SHORA, ROSTOUCÍ $\Rightarrow$ MÁ LIMITU $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}$.