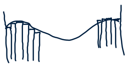
$(R)\int_{-1}^{2} sgn(x)\,dx$



$D_\varepsilon\left(-1, 0-\frac{\varepsilon}{2}, 0+\frac{\varepsilon}{2}, 2\right)$

$S(D_\varepsilon, sgn(x)) = -1\cdot\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) + 1\cdot\varepsilon + 1\left(2-\frac{\varepsilon}{2}\right) = 1+\varepsilon$

$s(D_\varepsilon, sgn(x)) = 1-\varepsilon$

„1 je dolní mez pro horní sumy"

- pro spor není $\Rightarrow \exists D;\ S(D, sgn(x)) = 1-\delta$, kde $\delta > 0$

potom ale $s(D_{\frac{\delta}{2}}, sgn(x)) > S(D, sgn(x)) \Rightarrow \lightning$

1 je největší dolní mez, jsme schopni se k ní libovolně přiblížit

- analogicky 1 je také sup. dolních součtů $\Rightarrow (R)\int_{-1}^{2} sgn(x)\,dx = 1$

---

$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln(k)}$

$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln(x)}\,dx := \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{1}{x\ln(x)}\,dx \overset{\lim}{=} \int_{\ln(2)}^{\ln(b)} \frac{dt}{t} =$

$t = \ln(x)$
$dt = \frac{1}{x}\,dx$

$= \lim_{b\to\infty}\left[\ln(t)\right]_{\ln(2)}^{\ln(b)} = \lim_{b\to\infty}\left(\ln(\ln(b)) - \ln(\ln(2))\right) = \infty - \ln(\ln(2)) = \infty$

$\Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln(k)} = \infty$

---

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ chceme odhadnout pomocí integrálu s přesností $\frac{1}{100}$

Víme: $\sum_{k=11}^{m}\frac{1}{k^2} \le \int_{10}^{m}\frac{dx}{x^2} \le \sum_{k=10}^{m-1}\frac{1}{k^2} \le \sum_{k=10}^{m}\frac{1}{k^2}$

$\int_{10}^{m}\frac{dx}{x^2} \le \sum_{k=10}^{m}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=11}^{m}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{100} \le \int_{10}^{m}\frac{dx}{x^2} + \frac{1}{100}$

$\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{k^2} + \int_{10}^{\infty}\frac{dx}{x^2} \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \le \sum_{k=1}^{9}\frac{1}{k^2} + \int_{10}^{\infty}\frac{dx}{x^2} + \frac{1}{100}$

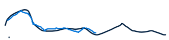
$\int_{10}^{\infty}\frac{dx}{x^2} = -\left[\frac{1}{x}\right]_{10}^{\infty} = \frac{1}{10}$

$1{,}639\ 767\ 731 \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \le 1{,}649\ 767\ 731$

$\frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}644934\ldots$

---

Délka křivky



aproximujeme pomocí lomených čar

délka jednoho úseku $dy$ $dx$ Pythagorovou větou $\sqrt{(dy)^2+(dx)^2}$

$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ $\quad dy = f'(x)\cdot dx$

Délka křivky $\int_a^b \sqrt{(dy)^2+(dx)^2} = \int_a^b \sqrt{(f'(x))^2 dx^2 + dx^2} = \int_a^b \sqrt{(f'(x))^2+1}\,dx$

---

délka grafu $f(x) = \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$

$\left(\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\frac{(1-x)^2}{1-x^2}} = \int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{2(1-x)}{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{2}{1+x}}\,dx =$

$= \sqrt{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx = \sqrt{2}\left[2\sqrt{1+x}\right]_{-1}^{1} = \sqrt{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2} = 4$

---

Objem tělesa, které vznikne rotací úseku mezi grafy fcí $f(x)=x^2$, $g(x)=x$

$x^2 = x$ platí pro $x=0$, $x=1$ integrujeme na $[0,1]$

$x^2$ je na $[0,1]$ menší než $x$

$\pi\int_0^1 g^2(x) - f^2(x)\,dx = \pi\int_0^1 x^2 - x^4\,dx = \pi\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{2\pi}{15}$

---

$f(x) = x^2$ pro $x\in[0,2]$ a rotujeme kolem $y$

inverzní fce k $x^2$ na $[0,2]$ je $\sqrt{y}$, počítáme objem tělesa, které vznikne rotací $f^{-1}(y)$ podle osy $y$

$\pi\int_0^{2^2}(\sqrt{y})^2\,dy = \frac{\pi}{2}\left[y^2\right]_0^4 = 8\pi$