Úlohy ke cvičení

Definice 1. Nechť $f\colon M \to \mathbb{R}$, $b \in M$ a $U(b,\delta) \subseteq M$ pro nějaké $\delta > 0$. *Derivace funkce f v bodě b* je limita

$$f'(b) := \lim_{h\to 0} \frac{f(b+h)-f(b)}{h} = \lim_{x\to b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}.$$

Derivace funkce f v bodě a zprava (zleva) je příslušná jednostranná limita pro $h \to 0^+$ ($h \to 0^-$), resp. $x \to a^+$ ($x \to a^-$). Tyto jednostranné derivace značíme $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$.

Věta 2 (Základní pravidla pro derivace)**.**

1. $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$
2. $(fg)' = f'g + fg'$
3. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
4. $(f(g))' = f'(g)g'$

Věta 3 (Derivace základních funkcí)**.**

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$
2. $(e^x)' = e^x$
3. $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
4. $(\sin(x))' = \cos(x)$
5. $(\cos(x))' = -\sin(x)$
6. $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Definice 4 (Taylorův polynom)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, nechť $n \in \mathbb{N}_0$ a nechť f je funkce definovaná na okolí a, která má v a vlastní n-tou derivaci $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Pokud $n = 0$, předpokládejme i spojitost f v a. *Taylorovým polynomem řádu n funkce f v bodě a* rozumíme polynom

$$\begin{aligned} T_n^{f,a}(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \end{aligned}$$

Věta 5 (Lagrangeův odhad zbytku)**.** *Nechť f je funkce, která má na otevřeném intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ vlastní derivaci řádu $n+1$ (a tím pádem i spojité vlastní derivace všech nižších řádů). Volme $a, b \in I$, kde $a \neq b$. Potom existuje bod c ostře mezi a a b takový, že platí*

$$R_n^{f,a}(b) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \tag{1}$$

Speciálně pro $M \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in I$ ležící ostře mezi body a a b platí $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, máme odhad

$$|R_n^{f,a}(b)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|b-a|^{n+1}. \tag{2}$$

Úloha 1. Vyšetřete průběh funkce $\arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$. Vyšetřete také konvexitu, určete asymptoty a limity v krajních bodech definičního oboru.

Úloha 2. Dokažte následující tvrzení.

(a) $e^x \geq 1 + x$

(b) Obdélník minimalizující obvod při daném obsahu je čtverec.

Úloha 3. Napište Taylorův polynom stupně 5 se středem v nule pro následující funkce.

(a) $f(x) = (1+x)^a$

(b) $f(x) = \sqrt{1+x}$

Úloha 4. Pomocí Taylorova polynomu přibližně spočtěte následující hodnoty a odhadněte chybu.

(a) $\cos(0,1)$

(b) $\sqrt{1,02}$.