

Úlohy ke cvičení

Definice 1. Necht $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, $b \in M$ a $U(b, \delta) \subseteq M$ pro nějaké $\delta > 0$. Derivace funkce f v bodě b je limita

$$f'(b) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Derivace funkce f v bodě a zprava (zleva) je příslušná jednostranná limita pro $h \rightarrow 0^+$ ($h \rightarrow 0^-$), resp. $x \rightarrow a^+$ ($x \rightarrow a^-$). Tyto jednostranné derivace značíme $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$.

Věta 2 (Základní pravidla pro derivace).

$$1. (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$$

$$3. \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$2. (fg)' = f'g + fg'$$

$$4. (f(g))' = f'(g)g'$$

Věta 3 (Derivace inverzní funkce). Necht $J \subseteq \mathbb{R}$ je interval, $a \in J$ jeho vnitřní bod, $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a ryze monotónní funkce (tj. rostoucí nebo klesající) a $f(a) = b$. Pak

1. Když má f v a nenulovou derivaci $f'(a)$, potom inverzní funkce $f^{<-1>}$ má v b derivaci

$$(f^{<-1>})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

2. Když $f'(a) = 0$ a f je rostoucí (resp. klesající), potom $(f^{<-1>})'(b) = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Věta 4 (Derivace základních funkcí).

$$1. (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$3. (\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$5. (\cos(x))' = -\sin(x)$$

$$2. (e^x)' = e^x$$

$$4. (\sin(x))' = \cos(x)$$

Věta 5 (l'Hospitalovo pravidlo). Necht $a \in \mathbb{R}^*$, funkce $f, g: P(a, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ mají na $P(a, \delta)$ vlastní derivaci a $g'(x) \neq 0$ na $P(a, \delta)$.

1. Pokud $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x) = A \in \mathbb{R}^*$, pak i $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = A$.

2. Pokud $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x) = A \in \mathbb{R}^*$, pak i $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = A$.

Totéž platí pro jednostranné limity $x \rightarrow a^-$ a $x \rightarrow a^+$.

Úloha 1. Urcete definiční obor a spočítejte derivace následujících funkcí.

$$(a) x^2 e^{-x^2}$$

$$(e) \arcsin(x)$$

$$(b) x^{(x^x)}$$

$$(f) \arcsin(\sin(x))$$

$$(c) \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$(d) \cos(x)^{\sin(x)}$$

$$(g) x|x|$$

(h)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

Úloha 2. Pomocí l'Hospitalova pravidla spočtěte limity funkcí.

(a)
$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

(b)
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^5 + x^2 + 1)}{\ln(x^{10} + x + 3)}$$

Úloha 3. Vyšetřete průběh funkce $\sin(x) - |\cos(x)|$.