

Úlohy ke cvičení

Věta 1 (Heineho definice limity funkce). *Nechť f je funkce definovaná na prstencovém okolí $P(b, \Delta)$ bodu $b \in \mathbb{R}^*$ pro nějaké $\Delta > 0$. Následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = L$;
2. *pro každou posloupnost $(x_n) \subseteq P(b, \Delta)$, pro níž platí $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, platí také $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$.*

Věta 2 (Limita složené funkce). *Nechť $A, B, C \in \mathbb{R}^*$, nechť $g(x)$ je funkce splňující $\lim_{x \rightarrow A} g(x) = B$ a $f(x)$ je funkce splňující $\lim_{x \rightarrow B} f(x) = C$. Navíc nechť je splněna aspoň jedna z podmínek P1 a P2:*

P1. *Funkce $f(x)$ je spojitá v B (jinými slovy, $f(B) = \lim_{x \rightarrow B} f(x) = C$).*

P2. *Na nějakém prstencovém okolí $P(A, \eta)$ funkce $g(x)$ nenabývá hodnotu B , tj. $B \notin g(P(A, \eta))$.*

Potom

$$\lim_{x \rightarrow A} f(g(x)) = C.$$

Věta 3 („Znamé limity“).

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Definice 4. Nechť $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, $b \in M$ a $U(b, \delta) \subseteq M$ pro nějaké $\delta > 0$. Derivace funkce f v bodě b je limita

$$f'(b) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Derivace funkce f v bodě a zprava (zleva) je příslušná jednostranná limita pro $h \rightarrow 0^+$ ($h \rightarrow 0^-$), resp. $x \rightarrow a^+$ ($x \rightarrow a^-$). Tyto jednostranné derivace značíme $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$.

Věta 5 (Základní pravidla pro derivace).

$$1. (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' \qquad 3. \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$2. (fg)' = f'g + fg' \qquad 4. (f(g))' = f'(g)g'$$

Věta 6 (Derivace základních funkcí).

$$1. (x^n)' = nx^{n-1} \qquad 3. (\ln(x))' = \frac{1}{x} \qquad 5. (\cos(x))' = -\sin(x)$$

$$2. (e^x)' = e^x \qquad 4. (\sin(x))' = \cos(x)$$

Úloha 1. Určete limitu posloupnosti $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{\sqrt{n^3+3n^2}}$.

Úloha 2. Rozhodněte, zdali následující funkce můžeme spojitě dodefinovat na celé množině \mathbb{R} .

(a) $\frac{1}{x-8}$

(b) $\frac{\sin(x)}{x}$

Úloha 3. Ukažte, že otevřené množiny \mathbb{R}^n jsou uzavřené na konečné průniky a libovolná sjednocení. Neboli

(a) pokud M_1, M_2, \dots, M_n jsou otevřené, pak i $\bigcap_{i=1}^n M_i$ je otevřená,

(b) pokud M_i pro každé $i \in I$ jsou otevřené, pak i $\bigcup_{i \in I} M_i$ je otevřená.

Poznámka. Množina I je indexová množina, která nemusí být konečná, dokonce ani spočetná.

Úloha 4. Spočítejte z definice derivaci funkce $\frac{1}{x^2}$ pro každý bod $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.