Úlohy ke cvičení

Věta 1 (Bernoulliova nerovnost)**.** *Pro každé reálné číslo $x \geq -1$ a celé číslo $n \geq 0$ platí, že*

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Věta 2 (Aritmetika limit)**.** *Nechť $(a_n),(b_n)$ jsou posloupnosti reálných čísel s $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}^*$. Pak*

1. *$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = A+B$, je-li výraz na pravé straně definován,*
2. *$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = AB$, je-li výraz na pravé straně definován,*
3. *pokud $b_n \neq 0$ pro každé $n > n_0$, pak $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = A/B$, je-li výraz na pravé straně definován.*

Věta 3 (O dvou policajtech)**.** *Nechť posloupnosti $(a_n),(b_n),(c_n) \subset \mathbb{R}$ splňují, že $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a \in \mathbb{R}$ a pro každé $n > n_0$ je $a_n \leq c_n \leq b_n$. Pak (c_n) konverguje a $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.*

Úloha 1. Jaké implikace platí mezi následujícími výroky?

1. Posloupnost je shora neomezená.
2. Posloupnost má limitu $+\infty$.

Úloha 2. Pro každé $k \in \mathbb{R}$ najděte posloupnosti $(a_n),(b_n)$ reálných čísel s limitami $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^\star$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}^\star$ takové, že $A+B$ je neurčitý výraz, ale $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = k$.

Úloha 3. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in [-1,\infty)$ platí

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Úloha 4. Určete limitu následujících posloupností:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^5+3n-2}{n^5-3n^3}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n+n^5}{n^6+n!}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+2^n+3^n}$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}$
8. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+5}-\sqrt{n-1}$

Úloha 5. Určete limitu následující rekurentní posloupnosti zadané předpisem $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n+4}$.