Úlohy ke cvičení

Definice 1. Relace R na množině X se nazývá *(částečné) uspořádání*, pokud je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Uspořádání $(X, \preceq)$ se nazvývá *lineární*, pokud pro každé dva prvky $x, y \in X$ platí $x \preceq y$ nebo $y \preceq x$.

Prvek $a \in X$ se nazývá

- *největší prvek*, pokud pro každé $x \in X$ platí $x \preceq a$,
- *maximální prvek*, pokud neexistuje $x \in X$ takové, že $a \prec x$.

Analogicky definujeme *nejmenší* a *minimální prvek*.

Buď $M \subseteq X$ podmnožina částečně uspořádáné množiny. Prvek $a \in X$ se nazývá *horní mez (závora)* množiny M, pokud pro všechna $m \in M$ platí $m \preceq a$. Nejmenší horní mez (pokud existuje) se nazývá *supremum*. Analogicky definujeme *dolní mez* a *infimum*.

Úloha 1. Dokažte:

a) Množina $\mathbb{Z}$ všech celých čísel je spočetná

b) Množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel je spočetná.

c) Množina všech podmnožin přirozených čísel není spočetná.

d) Množina všech konečných podmnožin přirozených čísel je spočetná.

Úloha 2. Najděte příklad lineárně uspořádané množiny s nejmenším a největším prvkem, ve které existuje podmnožina, která nemá supremum ani infimum.

Úloha 3. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in [-1, \infty)$ platí

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Úloha 4. Nalezněte posloupnosti (an) a (b_n), že jedna je podposloupností druhé a naopak, ale $(a_n) \neq (b_n)$.

Úloha 5. Pro každé $k \in \mathbb{R}$ najděte posloupnosti $(a_n), (b_n)$ reálných čísel s limitami $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^\star$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}^\star$ takové, že $A + B$ je neurčitý výraz, ale $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = k$.

Úloha 6. Jaké implikace platí mezi následujícími výroky?

1. Posloupnost je shora neomezená.
2. Posloupnost má limitu $+\infty$.

Úloha 7. Nechť $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ jsou posloupnosti reálných čísel, které mají vlastní limity $\mathit{lim}_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$. Dokažte, že

1. pokud $a < b$, tak existuje n_0, že $n > n_0 \Rightarrow a_n < b_n$,
2. pokud $a_n \leq b_n$ pro každé $n > n_0$, pak $a \leq b$.
