Úlohy ke cvičení

Věta 1 (Integrální kritérium konvergence). *Nechť a je celé číslo a funkce $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ je na $[a, +\infty)$ nezáporná a nerostoucí. Pak*

$$\sum_{n=a}^{\infty} f(n) = f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \cdots < +\infty \iff \int_a^{+\infty} f < +\infty \,.$$

Řada tedy konverguje, právě když konverguje odpovídající integrál.

Věta 2 (Délka křivky). *Existuje-li spojitá derivace spojité funkce $f(x)$ na intervalu $[a, b]$, pak graf funkce f na intervalu $[a, b]$ má délku*

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Věta 3 (Objem rotačního tělesa). *Mějme spojitou funkci $f\colon [a, b] \to [0, \infty)$. Potom objem tělesa, které vznikne rotací podgrafu funkce f kolem osy x je roven*

$$\pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Věta 4 (Povrch pláště rotačního tělesa). *Mějme spojitou funkci $f\colon [a, b] \to [0, \infty)$, která má na tomtu intervalu také spojitou derivaci. Potom povrch pláště tělesa, které vznikne rotací grafu funkce f kolem osy x je roven*

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Úloha 1. Spočtěte z definice Riemannova integrálu $\displaystyle\int_{-1}^{2} \operatorname{sgn}(x)\, dx$.

Úloha 2. Určete, zdali řada $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln(k)}$ konverguje, nebo diverguje.

Úloha 3. Odhadněte součet řady $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ tak, aby rozdíl oproti skutečné hodnotě byl nejvýš $\frac{1}{100}$.

Úloha 4. Vypočítejte délku rovinné křivky

$$f(x) = \arcsin(x) + \sqrt{1 - x^2},\ x \in [-1, 1].$$

Úloha 5. Spočítejte objem a povrch koule o poloměru r.

Úloha 6. Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací obrazce mezi grafy funkcí $f(x) = x^2$, $g(x) = x$.

Úloha 7. Spočítejte objem tělesa, které vznikne rotací grafu funkce $f(x) = x^2$ pro $x \in [0, 2]$ kolem osy y.