Úlohy ke cvičení

Definice 1. Nechť $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ a $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ je daná funkce. Pokud má funkce $F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ na (a,b) derivaci a ta se rovná $f(x)$, tj. $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a,b)$, řekneme, že F *je na intervalu* (a,b) *primitivní funkcí k funkci* f.

Věta 2 (Linearita integrálu)**.**

$$\int af + bg = a \int f + b \int g.$$

Věta 3 (Integrace per partes)**.** *Nechť jsou funkce f a g spojité na intervalu (a,b) a funkce F a G jsou k nim na (a,b) primitivní. Potom i funkce fG a Fg mají na (a,b) primitivní funkce a na (a,b) platí identita*

$$\int f(x)G(x)\ dx + \int F(x)g(x)\ dx = F(x)G(x) + c,$$

tj. součet funkce primitivní k fG a funkce primitivní k Fg je až na aditivní konstantu roven funkci FG.

Věta 4 (O substituci)**.** *Buďte dány funkce $\varphi\colon (\alpha,\beta) \to (a,b)$ a $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, přičemž φ má na (α,β) vlastní derivaci. Nechť je funkce $F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ na intervalu (a,b) primitivní k funkci f. Pak na intervalu (α,β) platí, že*

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt = F(\varphi(t)) + c.$$

Věta 5 (2. věta o substituci)**.** *Nechť je funkce $G\colon (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ na intervalu (α,β) primitivní k funkci $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ a navíc platí, že $\varphi((\alpha,\beta)) = (a,b)$ a φ má na (α,β) nenulovou vlastní derivaci. Pak na intervalu (a,b) platí, že*

$$\int f(x)\ dx = G(\varphi^{-1}(x)) + c.$$

Věta 6 („Známé primitivní funkce“)**.**

1. $\int x^a = \frac{1}{a+1} x^{a+1}$ *pro* $a \neq -1$
2. $\int \frac{1}{x} = \ln(|x|)$
3. $\int \cos(x) = \sin(x)$
4. $\int \sin(x) = -\cos(x)$
5. $\int e^x = e^x$
6. $\int e^{-x} = -e^{-x}$
7. $\int \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x)$
8. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos(x)$

Úloha 1. Spočítejte pomocí metody *per partes.*

(a) $\int xe^x\,dx$

(b) $\int \ln(x)\,dx$

(c) $\int x^3 e^x\,dx$

(d) $\int \cos^2(x)\,dx$

Úloha 2. Spočítejte pomocí substituční metody.

(a) $\int e^x \sin(e^x)\,dx$

(b) $\int \mathrm{tg}(x)\,dx$

(c) $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$

(d) $\int \frac{2x+3}{x^2-2x+5}\,dx$

Úloha 3. Spočítejte.

(a) $\int x^2 \arccos(x)\,dx$

(b) $\int \mathrm{arctg}(\sqrt{x})\,dx$

Úloha 4. Spočtěte $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ pomocí substituční metody druhého typu.