

Úlohy ke cvičení

Definice 1. Množina M je *spočetná* pokud existuje prosté zobrazení z M do množiny přirozených čísel \mathbb{N} .

Úloha 1. Z knížky *Jak se jmenuje tato knížka* od Raymonda Smullyana. Hádanky z ostrova poctivců a padouchů. Padouch vždy lže a poctivec vždy mluví pravdu. Potkáte tři obyvatele A, B, C.

- Zeptáte se jich, jestli jsou padouši, nebo poctivci. A odpoví nezřetelně, tudíž nevíte, co řekl. Zeptáte se tedy B: „Co říkal A?“ B odpoví: „A říkal, že je padouch.“ V tomto okamžiku třetí, C, řekne: „Nevěřte B, ten lže!“ Co jsou B a C?
- A řekne: „Já jsem padouch nebo B je poctivec.“ Co jsou A a B?
- A řekne: „Já jsem padouch, ale B ne.“ Co jsou A a B?
- A řekne: „B a C mají stejnou povahu.“ Nato se někdo zeptá C: „Mají A a B stejnou povahu?“ Co C odpoví?

Úloha 2. Následující výroky nejprve запиšte pomocí kvantifikátorů a poté je znegujte.

- Všechna přirozená čísla jsou sudá.
- Každé prvočíslo je liché.
- Některé přirozené číslo je dělitelné všemi prvočísly.
- Mezi n a $2n$ najdeme vždy nějaké prvočíslo.

Úloha 3.

- Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:

$$A \implies B, \quad \neg B \implies \neg A, \quad \neg(A \wedge \neg B), \quad \neg A \vee B$$

- Jsou i následující dva výroky ekvivalentní?

$$(A \implies B) \implies C, \quad A \implies (B \implies C)$$

Úloha 4. Dokažte:

- Množina \mathbb{Z} všech celých čísel je spočetná
- Množina \mathbb{Q} všech racionálních čísel je spočetná.
- Množina všech podmnožin přirozených čísel není spočetná.
- Množina všech konečných podmnožin přirozených čísel je spočetná.