Úlohy ke cvičení

Definice 1. *Graf* $G = (V, E)$ je dvojice, která sestává z množiny *vrcholů* V a z množiny *hran* $E \subseteq \{\{u, v\}; u, v \in V, u \neq v\}$.

Definice 2. Graf se nazývá k*-regulární*, pokud má všechny vrcholy stupně k.

Věta 3. *Pro každý graf* $G(V, E)$ *platí* $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$, *kde* $\deg(v)$ *je stupeň vrcholu* v.

Jako důsledek dostáváme, že každý graf má sudý počet vrcholů lichého stupně.

Definice 4. Uzavřený sled $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_{m-1}, v_{m-1}, e_m, v_0)$ v grafu G je *eulerovský*, pokud se v něm každá hrana grafu G vyskytuje právě jednou a každý vrchol alespoň jednou. Graf se nazývá *eulerovský*, pokud v něm existuje eulerovský sled.

Věta 5. *Graf je eulerovský právě tehdy, když neobsahuje žádný vrchol lichého stupně.*

Definice 6. Graf se nazýva *bipartitní*, pokud můžeme rozdělit jeho vrcholy do dvou disjunktních množin tak, že mezi žádnými dvěma vrcholy ze stejné množiny nevede hrana.

Úloha 1. Ukažte, že pokud má $2k$-regulární graf $G(V, E)$ sudý počet hran, tak k nebo $|V|$ je sudé.

Úloha 2. Dokažte, že graf se všemi stupni sudými neobsahuje most, tedy hranu, jejímž odebráním se zvýší počet komponent.

Úloha 3. Charakterizujte všechny grafy, které mají (ne nutně uzavřený) eulerovský tah.

Úloha 4. Dokažte, že hrany každého eulerovského grafu lze rozložit na disjunktní sjednocení kružnic.

Úloha 5. Ukažte, že každý graf s $m \geq 2$ hranami má bipartitní podgraf s alespoň $\frac{m}{2}$ hranami.