Úlohy ke cvičení

Věta 1 (Multinomická věta)**.**

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_m=n\\ k_1,k_2,\ldots,k_m\geq 0}} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m},$$

kde $\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$.

Věta 2 (Pirncip inkluze a exkluze)**.** *Nechť* $A_1, \ldots A_n$ *jsou konečné množiny. Pak platí*

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{\emptyset\neq I\subseteq\{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|.$$

Definice 3. Buď A konečná množina a $\pi\colon A \to A$ permutace na množině A (tj. vzájemně jednoznačné zobrazení). Řekneme, že π má *pevný bod*, pokud existuje $a \in A$ takové, že $\pi(a) = a$. Počet permutací bez pevného bodu na n-prvkové množině pak značíme š(n).

Úloha 1. Kolik členů má rozvoj $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$ podle multinomické věty?

Úloha 2. Určete počet permutací s právě jedním cyklem.

Úloha 3. Dokažte vztah

$$\text{š}(n) = n! - n\text{š}(n-1) - \binom{n}{2}\text{š}(n-2) - \cdots - \binom{n}{n-1}\text{š}(1) - 1.$$

Úloha 4. Kolik existuje ekvivalencí na n-prvkové množině?