Úlohy ke cvičení

Definice 1. Relace $f \subseteq X \times Y$ se nazývá *zobrazení*, pokud pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$ takové, že xfy. Takové y značíme $f(x)$. Zobrazení pak značíme $f\colon X \to Y$.

Definice 2. Zobrazení $f\colon X \to Y$ se nazývá

- *prosté (injektivní)*, pokud $f(x_1) = f(x_2)$ implikuje $x_1 = x_2$,
- *na (surjektivní)*, pokud pro každé $y \in Y$ existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = y$,
- *vzájemně jednoznačné (bijektivní)*, pokud je prosté a na.

Definice 3. Relace R na množině X se nazývá *(částečné) uspořádání*, pokud je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Uspořádání $(X, \preceq)$ se nazvývá *úplné (lineární)*, pokud pro každé dva prvky $x, y \in X$ platí $x \preceq y$ nebo $y \preceq x$.

Definice 4. Buď $(X, \preceq)$ částečně uspořádaná množina a $M \subseteq X$ její podmnožina. Pak M se nazývá

- *řetězec*, pokud pro každé $m_1, m_2 \in M$ platí $m_1 \preceq m_2$ nebo $m_2 \preceq m_1$. Neboli každé dva prvky z M jsou porovnatelné.
- *Antiřetězec*, pokud pro každé dva různé $m_1, m_2 \in M$ platí $m_1 \not\preceq m_2$ ani $m_2 \not\preceq m_1$. Neboli každé dva různé prvky z M jsou neporovnatelné.

Věta 5. *Buď $(X, \preceq)$ částečně uspořádaná konečná množina. Pak platí:*

- *Řetězec $\{r_1, \ldots, r_n\} \subseteq X$ je nejdelší právě tehdy, když existuje n antiřetězců $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$, které pokrývají X, tj. $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = X$.*
- *Antiřetězec $\{a_1, \ldots, a_m\} \subseteq X$ je největší právě tehdy, když existuje m řetězců $R_1, \ldots, R_m \subseteq X$, které pokrývají X, tj. $\bigcup_{k=1}^{m} R_k = X$.*

Definice 6. Buď $(X, \preceq)$ částečně uspořádaná množina a $M \subseteq X$ její podmnožina. Prvek $a \in X$ se nazývá *horní mez* množiny M, pokud pro všechna $m \in M$ platí $m \preceq a$. Nejmenší horní mez (pokud existuje) se nazývá *supremum*. Analogicky definujeme *dolní mez* a *infimum*.

Definice 7. Relace R na X je *izomorfní* relaci S na Y, pokud existuje bijekce $f\colon X \to Y$ taková, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in S$.

Úloha 1. Určete počet různých ekvivalencí na čtyřech prvcích.

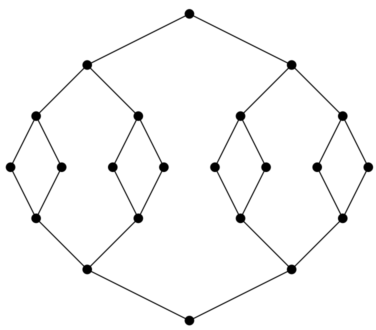
Úloha 2. Najděte

1. bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$;
2. bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}^2$.

Úloha 3. Uvažme relaci "x je dělitelem čísla y" na množině $\{1, \ldots, n\}$.

1. Dokažte, že tato relace je uspořádání.
2. Má toto uspořádání nějaký největší a nejmenší prvek?
3. Má toto uspořádání nějaký minimální a maximální prvek?
4. Čemu v tomto uspořádání odpovídá infimum a supremum neprázdné podmnožiny?

Úloha 4. U uspořádání daného následujícím Hasseho diagramem vyznačte nějaký nejdelší řetězec a antiřetězec. Zdůvodněte, proč nelze najít delší, resp. větší.



Úloha 5. Dokažte, že pro každou konečnou částečně uspořádanou množinu $(X, \preceq)$ existuje konečná množina A a systém jejích podmnožin $\mathcal{M}$ takový, že $(\mathcal{M}, \subseteq)$ je isomorfní $(X, \preceq)$.

Úloha 6. Dokažte, že každá posloupnost $n^2 + 1$ reálných čísel obsahuje monotónní podposloupnost délky $n + 1$.