Úlohy ke cvičení

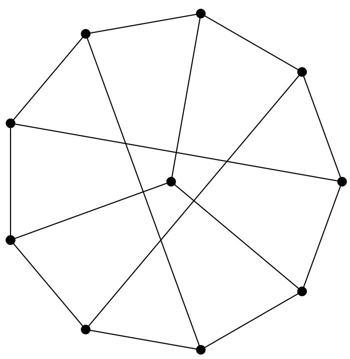
Definice 1. Pro graf $G = (V, E)$ a přirozené číslo k nazveme zobrazení $b \colon V \to \{1, \ldots, k\}$ *obarvením grafu G pomocí k barev*, pokud pro každé dva vrcholy $u, v \in V$ platí $\{u, v\} \in E \implies b(u) \neq b(v)$. Barevnost grafu G, kterou značíme $\chi(G)$, je pak minimální počet barev potřebný k obarvení G.

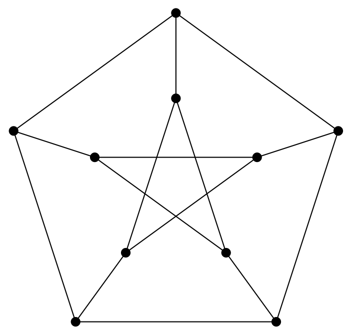
Věta 2. *Graf je rovinný právě tehdy, když neobsahuje podrozdělení $K_{3,3}$ ani K_5 jako podgraf.*

Věta 3. *Je-li $G = (V, E)$ rovinný graf s alespoň 3 vrcholy, pak $|E| \leq 3|V| - 6$. Pokud navíc G neobsahuje trojúhelník jako podgraf, pak platí $|E| \leq 2|V| - 4$.*

Věta 4. *Buď $G = (V, E)$ rovinný graf a ať s označuje počet jeho stěn. Pak platí $|V| - |E| + s = 2$.*

Úloha 1. Ukažte, že Petersenův graf není rovinný.





Úloha 2. Dokažte větu o čtyřech barvách pro rovinný graf bez trojúhelníku.

Úloha 3. Označíme jako $\delta(G)$ minimální stupeň grafu G. Dokažte, že barevnost G je menší nebo rovna $1 + \max\{\delta(G'); G'$ je podgraf G$\}$.

Úloha 4. Ukažte, že duál eulerovského rovinného grafu je bipartitní.

Úloha 5. V zábavném pořadu *Let's Make a Deal* nabízel moderátor Monty Hall výhru pod následujícími pravidly: Výhra — automobil je schovaná za jedněmi ze tří dveří. Za zbylými dvěma je cena útěchy — koza. Hráč nejprve na některé dveře ukáže. Moderátor, který ví kde se skrývá výhra, otevře z ostatních dveří takové, že je za nimi výhra není. V této situaci má hráč otevřít jedny ze zbylých dvou dveří, aby dostal, co se za nimi skrývá.

Je pro hráče výhodné změnit názor a otevřít jiné dveře, než na které původně ukázal?