

## Úlohy ke cvičení

**Definice 1.** Graf  $G = (V, E)$  je dvojice, která sestává z množiny vrcholů  $V$  a z množiny hran  $E \subseteq \{\{u, v\}; u, v \in V, u \neq v\}$ .

**Definice 2.** Graf  $G = (V_G, E_G)$  je

- *podgraf* grafu  $H = (V_H, E_H)$ , pokud  $V_G \subseteq V_H$  a  $E_G \subseteq E_H \cap \binom{V_G}{2}$ .
- *indukovaný podgraf*  $H = (V_H, E_H)$ , pokud  $V_G \subseteq V_H$  a  $E_G = E_H \cap \binom{V_G}{2}$ .

**Definice 3.** Graf se nazývá *strom*, pokud je souvislý a neobsahuje cyklus jako podgraf.

*Kostra* grafu je jeho podgraf na všech jeho vrcholech, který je stromem.

**Věta 4.** Pro každý graf  $G = (V, E)$  platí

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|,$$

kde  $\deg(v)$  je stupeň vrcholu  $v$  neboli počet hran, ve kterých se nachází.

---

**Úloha 1.** Mějme strom, který má  $l > 0$  listů a  $i$  vnitřních vrcholů, přičemž každý vnitřní vrchol má stupeň 3. Dokažte, že vždy platí  $l = i + 2$ .

**Úloha 2.** Ukažte, že pro každou kostru  $K$  grafu  $G$  a hranu  $e \in E_G \setminus E_K$  existují dvě hrany kostry  $e'$  a  $e''$  takové, že jak  $(K \setminus e') \cup e$  tak  $(K \setminus e'') \cup e$  jsou opět kostry grafu  $G$ .

**Úloha 3.** Určete počet koster grafu  $K_{2,n}$ .