Úlohy ke cvičení

Definice 1. *Graf* $G = (V, E)$ je dvojice, která sestává z množiny *vrcholů* V a z množiny *hran* $E \subseteq \{\{u, v\}; u, v \in V, u \neq v\}$.

Definice 2. Graf $G = (V_G, E_G)$ je *izomorfní* grafu $H = (V_H, E_H)$, pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $f \colon V_G \to V_H$ takové, že $(u, v) \in E_G \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E_H$.

Definice 3. Graf $G = (V_G, E_G)$ je

- *podgraf* grafu $H = (V_H, E_H)$, pokud $V_G \subseteq V_H$ a $E_G \subseteq V_H \cap \binom{V_G}{2}$.
- *indukovaný podgraf* $H = (V_H, E_H)$, pokud $V_G \subseteq V_H$ a $E_G = V_H \cap \binom{V_G}{2}$.

Definice 4. Graf se nazývá *strom*, pokud je souvislý a neobsahuje cyklus jako podgraf.

Kostra grafu je jeho podgraf na všech jeho vrcholech, který je stromem.

Věta 5. *Pro každý graf* $G = (V, E)$ *platí*

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|,$$

kde $\deg(v)$ *je stupeň vrcholu* v *neboli počet hran, ve kterých se nachází.*

Definice 6. Skóre grafu G je posloupnost stupňů jeho vrcholů.

Věta: Nechť $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ je posloupnost přirozených čísel. Předpokládejme, že $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$, a označme symbolem D' posloupnost $(d'_1, d'_2, \ldots, d'_{n-1})$, kde

$$d'_i = \begin{cases} d_i & \text{pro } i < n - d_n, \\ d_i - 1 & \text{pro } i \geq n - d_n. \end{cases}$$

Potom D je skóre grafu právě tehdy, když D' je skóre grafu.

Úloha 1. Najděte příklad dvou neizomorfních grafů (dvou stromů, stromu a grafu, co není strom) se stejným skóre.

Úloha 2. Ověřte, zdali je posloupnost $(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5)$ skóre grafu. Pokud ano, sestrojte graf, který má takové skóre.

Úloha 3. Ukažte, že graf je strom právě tehdy, když neobsahuje cyklus a $|V| = |E| + 1$.