Úlohy ke cvičení

Věta 1 (Základní pravidla pro derivace)**.**

1. $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$
2. $(fg)' = f'g + fg'$
3. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
4. $(f(g))' = f'(g)g'$

Věta 2 (Derivace základních funkcí)**.**

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$
2. $(e^x)' = e^x$
3. $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
4. $(\sin(x))' = \cos(x)$
5. $(\cos(x))' = -\sin(x)$
6. $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Věta 3 (l'Hospitalovo pravidlo)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, funkce $f, g\colon P(a,\delta) \to \mathbb{R}$ mají na $P(a,\delta)$ vlastní derivaci a $g'(x) \neq 0$ na $P(a,\delta)$.*

1. *Pokud* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ *a* $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = A \in \mathbb{R}^*$, *pak i* $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A$.
2. *Pokud* $\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ *a* $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = A \in \mathbb{R}^*$, *pak i* $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A$.

Totéž platí pro jednostranné limity $x \to a^-$ a $x \to a^+$.

Definice 4 (Taylorův polynom)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, nechť $n \in \mathbb{N}_0$ a nechť f je funkce definovaná na okolí a, která má v a vlastní n-tou derivaci $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Pokud $n = 0$, předpokládejme i spojitost f v a. *Taylorovým polynomem řádu n funkce f v bodě a* rozumíme polynom

$$\begin{aligned} T_n^{f,a}(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \end{aligned}$$

Věta 5 (Lagrangeův odhad zbytku)**.** *Nechť f je funkce, která má na otevřeném intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ vlastní derivaci řádu $n+1$ (a tím pádem i spojité vlastní derivace všech nižších řádů). Volme $a, b \in I$, kde $a \neq b$. Potom existuje bod c ostře mezi a a b takový, že platí*

$$R_n^{f,a}(b) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \tag{1}$$

Speciálně pro $M \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in I$ ležící ostře mezi body a a b platí $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, máme odhad

$$|R_n^{f,a}(b)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|b-a|^{n+1}. \tag{2}$$

Úloha 1. Spočítejte limitu $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}$, nebo ukažte, že limita neexistuje.

Úloha 2. Pomocí Taylorova polynomu přibližně spočtěte následující hodnoty a odhadněte chybu.

(a) $\cos(0,1)$

(b) $\sqrt{1,02}$.

Úloha 3. Pro funkci $\frac{x^3}{(x-2)^2}$ určete definiční obor a obor hodnot, průsečíky s osami, limity v krajních bodech definičního oboru a asymptoty, lokální a globální maxima i minima. Vyšetřete také konvexitu.