Úlohy ke cvičení

Definice 1. Nechť $f\colon M \to \mathbb{R}$, $b \in M$ a $U(b,\delta) \subseteq M$ pro nějaké $\delta > 0$. *Derivace funkce f v bodě b* je limita

$$f'(b) := \lim_{h\to 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} = \lim_{x\to b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Derivace funkce f v bodě a zprava (zleva) je příslušná jednostranná limita pro $h \to 0^+$ ($h \to 0^-$), resp. $x \to a^+$ ($x \to a^-$). Tyto jednostranné derivace značíme $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$.

Věta 2 (Základní pravidla pro derivace)**.**

1. $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$
2. $(fg)' = f'g + fg'$
3. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
4. $(f(g))' = f'(g)g'$

Věta 3 (Derivace inverzní funkce)**.** *Nechť $J \subseteq \mathbb{R}$ je interval, $a \in J$ jeho vnitřní bod, $f\colon J \to \mathbb{R}$ je spojitá a ryze monotónní funkce (tj. rostoucí nebo klesající) a $f(a) = b$. Pak*

1. *Když má f v a nenulovou derivaci $f'(a)$, potom inverzní funkce $f^{<-1>}$ má v b derivaci*
$$\left(f^{<-1>}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$
2. *Když $f'(a) = 0$ a f je rostoucí (resp. klesající), potom $\left(f^{<-1>}\right)'(b) = +\infty$ (resp. $-\infty$).*

Věta 4 (Derivace základních funkcí)**.**

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$
2. $(e^x)' = e^x$
3. $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
4. $(\sin(x))' = \cos(x)$
5. $(\cos(x))' = -\sin(x)$

Věta 5 (l'Hospitalovo pravidlo)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, funkce $f, g\colon P(a,\delta) \to \mathbb{R}$ mají na $P(a,\delta)$ vlastní derivaci a $g'(x) \neq 0$ na $P(a,\delta)$.*

1. *Pokud $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ a $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = A \in \mathbb{R}^*$, pak i $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A$.*
2. *Pokud $\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ a $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = A \in \mathbb{R}^*$, pak i $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A$.*

Totéž platí pro jednostranné limity $x \to a^-$ a $x \to a^+$.

Úloha 1. Urcete definiční obor a spočtěte derivace následujících funkcí

(a) $\arcsin(x)$

(b) $\arcsin(\sin(x))$

(c) $x|x|$

(d)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

Úloha 2. Pomocí l'Hospitalova pravidla spočtěte limity funkcí.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x^5+x^2+1)}{\ln(x^{10}+x+3)}$

Úloha 3. Vyšetřete průběh funkce $\sin(x) - |\cos(x)|$.