Úlohy ke cvičení

Věta 1 (Heineho definice limity funkce)**.** *Nechť f je funkce definovaná na prstencovém okolí $P(b,\Delta)$ bodu $b \in \mathbb{R}^*$ pro nějaké $\Delta > 0$. Následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. $\lim_{x\to b} f(x) = L$;
2. *pro každou posloupnost* $(x_n) \subseteq P(b,\Delta)$, *pro níž platí* $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, *platí také* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

Věta 2 (Limita složené funkce)**.** *Nechť $A, B, C \in \mathbb{R}^*$, nechť $g(x)$ je funkce splňující* $\lim_{x\to A} g(x) = B$ *a $f(x)$ je funkce splňující* $\lim_{x\to B} f(x) = C$*. Navíc nechť je splněna aspoň jedna z podmínek P1 a P2:*

P1. *Funkce $f(x)$ je spojitá v B (jinými slovy, $f(B) = \lim_{x\to B} f(x) = C$).*

P2. *Na nějakém prstencovém okolí $P(A,\eta)$ funkce $g(x)$ nenabývá hodnotu B, tj. $B \notin g(P(A,\eta))$.*

Potom

$$\lim_{x\to A} f(g(x)) = C.$$

Věta 3 („Známé limity“)**.**

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Definice 4. Nechť $f\colon M \to \mathbb{R}$, $b \in M$ a $U(b,\delta) \subseteq M$ pro nějaké $\delta > 0$. *Derivace funkce f v bodě b* je limita

$$f'(b) := \lim_{h\to 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} = \lim_{x\to b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Derivace funkce f v bodě a zprava (zleva) je příslušná jednostranná limita pro $h \to 0^+$ ($h \to 0^-$), resp. $x \to a^+$ ($x \to a^-$). Tyto jednostranné derivace značíme $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$.

Věta 5 (Základní pravidla pro derivace)**.**

1. $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$
2. $(fg)' = f'g + fg'$
3. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
4. $(f(g))' = f'(g)g'$

Věta 6 (Derivace základních funkcí)**.**

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$
2. $(e^x)' = e^x$
3. $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
4. $(\sin(x))' = \cos(x)$
5. $(\cos(x))' = -\sin(x)$

Úloha 1. Určete limitu posloupnosti $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{\sqrt{n^3+3n^2}}$.

Úloha 2. Rozhodněte, zdali následující funkce můžeme spojitě dodefinovat na celé množině $\mathbb{R}$.

(a) $\dfrac{1}{x-8}$

(b) $\dfrac{\sin(x)}{x}$

Úloha 3. Ukažte, že otevřené množiny $\mathbb{R}^n$ jsou uzavřené na konečné průniky a libovolná sjednocení. Neboli

(a) pokud $M_1, M_2, \ldots, M_n$ jsou otevřené, pak i $\bigcap_{i=1}^n M_i$ je otevřená,

(b) pokud M_i pro každé $i \in I$ jsou otevřené, pak i $\bigcup_{i\in I} M_i$ je otevřená.

Poznámka. Množina I je indexová množina, která nemusí být konečná, dokonce ani spočetná.

Úloha 4. Spočítejte z definice derivaci funkce $\frac{1}{x^2}$ pro každý bod $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Úloha 5. Urcete definiční obor a spočtěte derivace následujících funkcí.

(a) $x^2 e^{-x^2}$

(b) $x^{(x^x)}$

(c) $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

(d) $\cos(x)^{\sin(x)}$