

Úlohy ke cvičení

Věta 1 (Aritmetika limit funkcí). *Nechť $a, A, B \in \mathbb{R}^*$, nechť f a g jsou funkce definované na nějakém prstencovém okolí $P(a, \Delta)$ bodu a , a nechť platí $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$. Potom*

(a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = A + B$, je-li tento součet definován.

(b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = AB$, je-li tento součin definován.

(c) *Nechť je navíc $g(x)$ nenulová na nějakém prstencovém okolí bodu a .
Pak $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = A/B$, je-li tento podíl definován.*

Věta 2 (Heineho definice limity funkce). *Nechť f je funkce definovaná na prstencovém okolí $P(b, \Delta)$ bodu $b \in \mathbb{R}^*$ pro nějaké $\Delta > 0$. Následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = L$;

2. *pro každou posloupnost $(x_n) \subseteq P(b, \Delta)$, pro níž platí $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, platí také $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$.*

Věta 3 (Limita složené funkce). *Nechť $A, B, C \in \mathbb{R}^*$, nechť $g(x)$ je funkce splňující $\lim_{x \rightarrow A} g(x) = B$ a $f(x)$ je funkce splňující $\lim_{x \rightarrow B} f(x) = C$. Navíc nechť je splněna aspoň jedna z podmínek P1 a P2:*

P1. *Funkce $f(x)$ je spojitá v B (jinými slovy, $f(B) = \lim_{x \rightarrow B} f(x) = C$).*

P2. *Na nějakém prstencovém okolí $P(A, \eta)$ funkce $g(x)$ nenabývá hodnotu B , tj. $B \notin g(P(A, \eta))$.*

Potom

$$\lim_{x \rightarrow A} f(g(x)) = C.$$

Věta 4 („Znamé limity“).

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Úloha 1. Spočítejte limity z definice:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-12}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-1}$$

Úloha 2. Spočítejte limity, nebo ukažte, že limita neexistuje:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - 1}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + 2^x)}{x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4x)^{\frac{1}{3x}}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$$