Úlohy ke cvičení

Věta 1 (Aritmetika limit)**.** *Nechť* $(a_n), (b_n)$ *jsou posloupnosti reálných čísel s* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}^*$. *Pak*

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$*, je-li výraz na pravé straně definován,*
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = AB$*, je-li výraz na pravé straně definován,*
3. *pokud* $b_n \neq 0$ *pro každé* $n > n_0$*, pak* $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = A/B$*, je-li výraz na pravé straně definován.*

Věta 2 (O dvou policajtech)**.** *Nechť posloupnosti* $(a_n), (b_n), (c_n) \subset \mathbb{R}$ *splňují, že* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a \in \mathbb{R}$ *a pro každé* $n > n_0$ *je* $a_n \le c_n \le b_n$. *Pak* (c_n) *konverguje a* $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

Definice 3 (Řada a její součet)**.** *Nekonečná řada (reálných čísel)* je výraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots ,$$

kde $(a_n)_{n\ge 1}$ je posloupnost reálných čísel.

Částečný součet řady, přesněji její n-tý částečný součet s_n, je součet jejích prvních n členů. Pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je tedy $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ a pro řadu $\sum_{k\ge 8} c_k$ je $s_n = c_8 + c_9 + \cdots + c_{n+7}$.

Pokud existuje vlastní limita posloupnosti (s_n) částečných součtů dané řady, mluvíme o *konvergentní řadě* a limita $\lim_{n\to\infty} s_n$ je jejím *součtem*. Pokud $\lim s_n$ neexistuje nebo je nevlastní, je daná řada *divergentní.*

Úloha 1. Mějme posloupnost (a_n) a dvě její podposloupnosti $(a_{\sigma(n)})$ a $(a_{\theta(n)})$ takové, že $a = \lim\limits_{n\to\infty}(a_{\sigma(n)}) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_{\theta(n)})$ a $(a_{\sigma(n)}) \cup (a_{\theta(n)}) = (a_n)$. Co můžeme říct o limitě (a_n)?

Úloha 2. Určete limitu následující rekurentní posloupnosti zadané předpisem $a_1 = 10$, $a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}$.

Úloha 3. Určete množinu hromadných bodů posloupnosti

$$a_1 = 1, a_n = \frac{1}{\text{„nejmenší dělitel } n \text{ větší než 1“}}.$$

Co je $\limsup$ a $\liminf$ této posloupnosti?

Úloha 4. Ukažte, že harmonická řada, tj. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, diverguje.

Úloha 5 (Na pořadí sčítanců řady záleží)**.** Již víme, že harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje. Nyní ale uvažujeme alternující harmonickou řadu, tj. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} \frac{1}{n}$. Ta se nám sečte na $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln 2$. Zkuste nyní přeuspořádat sčítance alternující harmonické řady tak, aby výsledná řada divergovala.

Úloha 6. Určete, zdali řada konverguje, nebo diverguje:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$,
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$,
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^5+4}$.