Úlohy ke cvičení

Věta 1 (Bernoulliova nerovnost). *Pro každé reálné číslo* $x \geq -1$ *a celé číslo* $n \geq 0$ *platí, že*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Věta 2 (Aritmetika limit). *Nechť* $(a_n), (b_n)$ *jsou posloupnosti reálných čísel s* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}^*$. *Pak*

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$, *je-li výraz na pravé straně definován,*
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = AB$, *je-li výraz na pravé straně definován,*
3. *pokud* $b_n \neq 0$ *pro každé* $n > n_0$, *pak* $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = A/B$, *je-li výraz na pravé straně definován.*

Věta 3 (O dvou policajtech). *Nechť posloupnosti* $(a_n), (b_n), (c_n) \subset \mathbb{R}$ *splňují, že* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a \in \mathbb{R}$ *a pro každé* $n > n_0$ *je* $a_n \leq c_n \leq b_n$. *Pak* (c_n) *konverguje a* $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

Úloha 1. Jaké implikace platí mezi následujícími výroky?

1. Posloupnost je shora neomezená.
2. Posloupnost má limitu $+\infty$.

Úloha 2. Určete limitu následujících posloupností:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^5 + 3n - 2}{n^5 - 3n^3}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n + n^5}{n^6 + n!}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n}$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}$
8. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+5} - \sqrt{n-1}$

Úloha 3. Určete limitu následující rekurentní posloupnosti zadané předpisem $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 4}$.