Úlohy ke cvičení

Definice 1. Relace R na množině X se nazývá *(částečné) uspořádání*, pokud je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Uspořádání $(X, \preceq)$ se nazvývá *lineární*, pokud pro každé dva prvky $x, y \in X$ platí $x \preceq y$ nebo $y \preceq x$.

Prvek $a \in X$ se nazývá

- *největší prvek*, pokud pro každé $x \in X$ platí $x \preceq a$,
- *maximální prvek*, pokud neexistuje $x \in X$ takové, že $a \prec x$.

Analogicky definujeme *nejmenší* a *minimální prvek.*

Buď $M \subseteq X$ podmnožina částečně uspořádáné množiny. Prvek $a \in X$ se nazývá *horní mez (závora)* množiny M, pokud pro všechna $m \in M$ platí $m \preceq a$. Nejmenší horní mez (pokud existuje) se nazývá *supremum.* Analogicky definujeme *dolní mez* a *infimum.*

Definice 2. Množina $M \subseteq \mathbb{R}$ je *hustá* v $\mathbb{R}$, pokud pro každá dvě reálná čísla a a b taková, že $a < b$, existuje $m \in M$ takové, že $a < m < b$.

Věta 3 (Aritmetika limit)**.** *Nechť $(a_n), (b_n)$ jsou posloupnosti reálných čísel s $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}^*$. Pak*

1. *$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$, je-li výraz na pravé straně definován,*
2. *$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = AB$, je-li výraz na pravé straně definován,*
3. *pokud $b_n \neq 0$ pro každé $n > n_0$, pak $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = A/B$, je-li výraz na pravé straně definován.*

Úloha 1. Najděte příklad lineárně uspořádané množiny s nejmenším a největším prvkem, ve které existuje podmnožina, která nemá supremum ani infimum.

Úloha 2. Ukažte, že množina iracionálních čísel je hustá v $\mathbb{R}$.

Nápověda. Využijte tvrzení, že množina $\mathbb{Q}$ je hustá v $\mathbb{R}$.

Úloha 3. Dokažte první a druhou část věty o aritmetice limit pro případ, kdy A i B jsou vlastní limity.

Úloha 4. Pro každé $k \in \mathbb{R}$ najděte posloupnosti $(a_n), (b_n)$ reálných čísel s limitami $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^\star$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}^\star$ takové, že $A + B$ je neurčitý výraz, ale $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = k$.

Úloha 5. Nechť $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ jsou posloupnosti reálných čísel, které mají vlastní limity $\mathop{lim}\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$. Dokažte, že

1. pokud $a < b$, tak existuje n_0, že $n > n_0 \Rightarrow a_n < b_n$,
2. pokud $a_n \leq b_n$ pro každé $n > n_0$, pak $a \leq b$.