Úlohy ke cvičení

Věta 1 (Per partes pro určitý integrál)**.** *Nechť f a g jsou dvě funkce spojité na $[a,b]$. Nechť mají f a g na (a,b) primitivní funkce F a G, které lze spojitě rozšířit na $[a,b]$. Potom existují oba určité integrály $(N)\int_a^b fG$ a $(N)\int_a^b Fg$ a platí*

$$(N)\int_a^b fG = [FG]_a^b - (N)\int_a^b Fg.$$

Věta 2 (Substituce pro určitý integrál)**.** *Nechť $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která má ve všech bodech otevřeného intervalu (α,β) vlastní derivaci. Označme $J := \varphi((\alpha,\beta)) = \{\varphi(t);\ t \in (\alpha,\beta)\}$. Ze spojitosti φ na $[\alpha,\beta]$ plyne, že J je omezený interval. Nechť f je funkce spojitá na J a newtonovsky integrovatelná na vnitřku J. Potom*

$$(N)\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = (N)\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx,$$

speciálně tedy levá i pravá strana existuje.

Věta 3 (Délka křivky)**.** *Existuje-li spojitá derivace spojité funkce $f(x)$ na intervalu $[a,b]$, pak graf funkce f na intervalu $[a,b]$ má délku*

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Věta 4 (Objem rotačního tělesa)**.** *Mějme spojitou funkci $f\colon [a,b] \to [0,\infty)$. Potom objem tělesa, které vznikne rotací podgrafu funkce f kolem osy x je roven*

$$\pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Věta 5 (Povrch pláště rotačního tělesa)**.** *Mějme spojitou funkci $f\colon [a,b] \to [0,\infty)$, která má na tomtu intervalu také spojitou derivaci. Potom povrch pláště tělesa, které vznikne rotací grafu funkce f kolem osy x je roven*

$$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Úloha 1. Určete hodnoty *gama funkce* pro přirozená čísla. Tj.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$$

pro $z \in \mathbb{N}$.

Úloha 2. Spočtěte

(a) $\displaystyle\int_0^1 \cos^3(x)\sin(x)\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$

Úloha 3. Spočtěte z definice Riemannova integrálu $\displaystyle\int_{-1}^2 \operatorname{sgn}(x)\,dx$.

Úloha 4. Vypočítejte délku rovinné křivky

$$f(x) = \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2},\ x \in [-1,1].$$

Úloha 5. Spočítejte objem a povrch koule o poloměru r.
