Úlohy ke cvičení

Věta 1 (2. věta o substituci)**.** *Nechť je funkce $G\colon (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ na intervalu (α,β) primitivní k funkci $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ a navíc platí, že $\varphi((\alpha,\beta)) = (a,b)$ a φ má na (α,β) nenulovou vlastní derivaci. Pak na intervalu (a,b) platí, že*

$$\int f(x)\, dx = G(\varphi^{-1}(x)) + c.$$

Definice 2. Předpokládejme, že máme dáno $a,b \in \mathbb{R}$, kde $a < b$. Funkce $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ má na intervalu (a,b) *Newtonův integrál*, když má na (a,b) primitivní funkci F a ta má vlastní jednostranné limity

$$F(a^+) = \lim_{x \to a^+} F(x) \;\text{ a }\; F(b^-) = \lim_{x \to b^-} F(x).$$

Symbolem $[F]_a^b$ označme rozdíl $F(b^-) - F(a^+)$. *Newtonův integrál* funkce f na intervalu (a,b) pak definujeme jako

$$(N) \int_a^b f(x)\, dx := [F]_a^b = F(b^-) - F(a^+) = \lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x).$$

Věta 3 (Per partes pro určitý integrál)**.** *Nechť f a g jsou dvě funkce spojité na $[a,b]$. Nechť mají f a g na (a,b) primitivní funkce F a G, které lze spojitě rozšířit na $[a,b]$. Potom existují oba určité integrály $(N)\int_a^b fG$ a $(N)\int_a^b Fg$ a platí*

$$(N) \int_a^b fG = [FG]_a^b - (N) \int_a^b Fg.$$

Věta 4 (Substituce pro určitý integrál)**.** *Nechť $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která má ve všech bodech otevřeného intervalu (α,β) vlastní derivaci. Označme $J := \varphi((\alpha,\beta)) = \{\varphi(t);\ t \in (\alpha,\beta)\}$. Ze spojitosti φ na $[\alpha,\beta]$ plyne, že J je omezený interval. Nechť f je funkce spojitá na J a newtonovsky integrovatelná na vnitřku J. Potom*

$$(N) \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = (N) \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx,$$

speciálně tedy levá i pravá strana existuje.

Věta 5 („Známé primitivní funkce“)**.**

1. $\int x^a = \frac{1}{a+1} x^{a+1}$ *pro* $a \neq -1$
2. $\int \frac{1}{x} = \ln(|x|)$
3. $\int \cos(x) = \sin(x)$
4. $\int \sin(x) = -\cos(x)$
5. $\int e^x = e^x$
6. $\int e^{-x} = -e^{-x}$
7. $\int \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x)$
8. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos(x)$

Úloha 1. Spočtěte

(a) $\int |x^2 - 1| \, dx$

(b) $\int \frac{2x+5}{x^3 - 6x^2 - 6x - 7} \, dx$

Úloha 2. Spočtěte $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ pomocí substituční metody druhého typu.