## Úlohy ke cvičení

**Definice 1.** Relace $R$ na množině $X$ se nazývá *(částečné) uspořádání*, pokud je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Uspořádání $(X, \preceq)$ se nazvývá *lineární*, pokud pro každé dva prvky $x, y \in X$ platí $x \preceq y$ nebo $y \preceq x$.

Prvek $a \in X$ se nazývá

- *největší prvek*, pokud pro každé $x \in X$ platí $x \preceq a$,
- *maximální prvek*, pokud neexistuje $x \in X$ takové, že $a \prec x$.

Analogicky definujeme *nejmenší* a *minimální prvek*.

Buď $M \subseteq X$ podmnožina částečně uspořádáné množiny. Prvek $a \in X$ se nazývá *horní mez (závora)* množiny $M$, pokud pro všechna $m \in M$ platí $m \preceq a$. Nejmenší horní mez (pokud existuje) se nazývá *supremum*. Analogicky definujeme *dolní mez* a *infimum*.

**Definice 2.** Množina $M$ je *spočetná* pokud existuje vzájemně jednoznačné (bijektivní) zobrazení z $M$ do množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$.

---

**Úloha 1.** Z knížky *Jak se jmenuje tato knížka* od Raymonda Smullyana. Hádanky z ostrova poctivců a padouchů. Padouch vždy lže a poctivec vždy mluví pravdu. Potkáte tři obyvatele A, B, C.

1. Zeptáte se jich, jestli jsou padouši, nebo poctivci. A odpoví nezřetelně, tudíž nevíte, co řekl. Zeptáte se tedy B: „Co říkal A?“ B odpoví: „A říkal, že je padouch.“ V tomto okamžiku třetí, C, řekne: „Nevěřte B, ten lže!“ Co jsou B a C?
2. A řekne: „Já jsem padouch nebo B je poctivec.“ Co jsou A a B?
3. A řekne: „Já jsem padouch, ale B ne.“ Co jsou A a B?
4. A řekne: „B a C mají stejnou povahu.“ Nato se někdo zeptá C: „Mají A a B stejnou povahu?“ Co C odpoví?

**Úloha 2.** Následující výroky nejprve zapište pomocí kvantifikátorů a poté je znegujte.

1. Všechna přirozená čísla jsou sudá.
2. Každé prvočíslo je liché.
3. Některé přirozené číslo je dělitelné všemi prvočísly.
4. Mezi $n$ a $2n$ najdeme vždy nějaké prvočíslo.

**Úloha 3.** 1. Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:

$$A \implies B, \quad \neg B \implies \neg A, \quad \neg(A \wedge \neg B), \quad \neg A \vee B$$

2. Jsou i následující dva výroky ekvivalentní?

$$(A \implies B) \implies C, \quad A \implies (B \implies C)$$

**Úloha 4.** Dokažte:

1. Množina všech podmnožin přirozených čísel není spočetná.
2. Množina všech konečných podmnožin přirozených čísel je spočetná.

---