

Úlohy ke cvičení

Binomická věta: $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$.

Princip inkluze a exkluze: Necht A_1, \dots, A_n jsou konečné množiny. Pak platí

$$\left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Definice: Graf $G = (V, E)$ je dvojice, která sestává z množiny vrcholů V a z množiny hran $E \subseteq \{\{u, v\}; u, v \in V, u \neq v\}$.

Úloha 1: Určete počet přirozených čísel mezi 1 a 840, která nejsou dělitelná 6, 10 ani 14.

Úloha 2: Kolik existuje grafů na n vrcholech bez izolovaných vrcholů.

Vrchol je izolovaný, pokud nepatří do žádné hrany.

Úloha 3: Kolik existuje rozdělení do dvojic ve skupině $2n$ lidí.

Úloha 4: Dokažte, že platí následující odhady kombinačního čísla $\binom{2n}{n}$.

a) $\frac{4^n}{2n+1} \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n$

b) $\prod_{\substack{n < p \leq 2n \\ p \text{ je prvočíslo}}} p \leq \binom{2n}{n}$