Úlohy ke cvičení

Binomická věta: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$.

Multinomická věta:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_m=n \\ k_1,k_2,\ldots,k_m \geq 0}} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m},$$

kde $\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$.

Princip inkluze a exkluze: Nechť $A_1, \ldots A_n$ jsou konečné množiny. Pak platí

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

Definice: Buď A konečná množina a $\pi\colon A \to A$ permutace na množině A (tj. vzájemně jednoznačné zobrazení). Řekneme, že π má *pevný bod*, pokud existuje $a \in A$ takové, že $\pi(a) = a$. Počet permutací bez pevného bodu na n-prvkové množině pak značíme š(n).

Úloha 1: Sečtěte:

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{4n}{2k}$$

Úloha 2: Kolik členů má rozvoj $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$ podle multinomické věty?

Úloha 3: Kolik existuje permutací n-prvkové množiny s jedním cyklem?

Úloha 4: Dokažte vztah

$$\text{š}(n) = n! - n\text{š}(n-1) - \binom{n}{2}\text{š}(n-2) - \cdots - \binom{n}{n-1}\text{š}(1) - 1.$$

Úloha 5: Určete počet přirozených čísel mezi 1 a 840, která nejsou dělitelná 6, 10 ani 14.

Úloha 6: Kolik existuje ekvivalencí na n-prvkové množině?

Úloha 7: Profesor Plešohlav zjistil, že stejné konference se účastní 5 jeho přátel. Z těchto pěti lidí potkal během přednášek:
— každého jednotlivce 10×,
— každou dvojici 5×,
— každou trojici 3×,
— každou čtveřici 2×,
— celou pětici 1×.

Kolik přednášek měla konference, pokud profesor potkal na každé přednášce někoho ze svých přátel?