# Úlohy ke cvičení

*Definice:* Relace $R$ na množině $X$ se nazývá *(částečné) uspořádání*, pokud je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Uspořádání $(X, \preceq)$ se nazvývá *úplné (lineární)*, pokud pro každé dva prvky $x, y \in X$ platí $x \preceq y$ nebo $y \preceq x$.

*Definice:* Buď $(X, \preceq)$ částečně uspořádaná množina. Prvek $a \in X$ se nazývá

- *největší prvek*, pokud pro každé $x \in X$ platí $x \preceq a$,
- *maximální prvek*, pokud neexistuje $x \in X$ takové, že $a \prec x$.

Analogicky definujeme *nejmenší* a *minimální prvek*.

*Definice:* Buď $(X, \preceq)$ částečně uspořádaná množina a $M \subseteq X$ její podmnožina. Prvek $a \in X$ se nazývá *horní mez* množiny $M$, pokud pro všechna $m \in M$ platí $m \preceq a$. Nejmenší horní mez (pokud existuje) se nazývá *supremum*. Analogicky definujeme *dolní mez* a *infimum*.

*Definice:* Buď $(X, \preceq)$ částečně uspořádaná množina a $M \subseteq X$ její podmnožina. Pak $M$ se nazývá

- *řetězec*, pokud pro každé $m_1, m_2 \in M$ platí $m_1 \preceq m_2$ nebo $m_2 \preceq m_1$. Neboli každé dva prvky z $M$ jsou porovnatelné.
- *Antiřetězec*, pokud pro každé dva různé $m_1, m_2 \in M$ platí $m_1 \not\preceq m_2$ ani $m_2 \not\preceq m_1$. Neboli každé dva různé prvky z $M$ jsou neporovnatelné.

*Binomická věta:* $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$.

---

*Úloha 1:* Rozhodněte, zdali v každém konečném a neprázdném částečném uspořádání musí každý maximální řetězec protínat:

a) antiřetězec tvořený maximálními prvky,

b) každý maximální antiřetězec.

*Úloha 2:* Z $n$ předmětů vybíráme $k$. Do následující tabulky doplňte počty možných výběrů:

| Výběry | Záleží na pořadí (variace) | Nezáleží na pořadí (kombinace) |
|---|---|---|
| bez opakování | | |
| s opakováním | | |

*Úloha 3:* Kolik existuje permutací $n$-prvkové množiny s jedním cyklem?

*Úloha 4:* Dokažte výpočtem i kombinatorickou úvahou:

a) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

c) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

d) $\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k} \binom{m}{r-k} = \binom{m+n}{r}$

e) $\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$

*Úloha 5:* Sečtěte:

a) $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$

b) $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$

c) $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{4n}{2k}$