Úlohy ke cvičení

Definice: Relace $f \subseteq X \times Y$ se nazývá *zobrazení*, pokud pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$ takové, že xfy. Takové y značíme $f(x)$. Zobrazení pak značíme $f\colon X \to Y$.

Definice: Zobrazení $f\colon X \to Y$ se nazývá

- *prosté (injektivní)*, pokud $f(x_1) = f(x_2)$ implikuje $x_1 = x_2$,
- *na (surjektivní)*, pokud pro každé $y \in Y$ existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = y$,
- *vzájemně jednoznačné (bijektivní)*, pokud je prosté a na.

Definice: Relace R na množině X se nazývá *(částečné) uspořádání*, pokud je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Uspořádání $(X, \preceq)$ se nazvývá *úplné (lineární)*, pokud pro každé dva prvky $x, y \in X$ platí $x \preceq y$ nebo $y \preceq x$.

Definice: Buď $(X, \preceq)$ částečně uspořádaná množina a $M \subseteq X$ její podmnožina. Pak M se nazývá

- *řetězec*, pokud pro každé $m_1, m_2 \in M$ platí $m_1 \preceq m_2$ nebo $m_2 \preceq m_1$. Neboli každé dva prvky z M jsou porovnatelné.
- *Antiřetězec*, pokud pro každé dva různé $m_1, m_2 \in M$ platí $m_1 \not\preceq m_2$ ani $m_2 \not\preceq m_1$. Neboli každé dva různé prvky z M jsou neporovnatelné.

Věta: Buď $(X, \preceq)$ částečně uspořádaná konečná množina. Pak platí:

- Řetězec $\{r_1, \ldots, r_n\} \subseteq X$ je nejdelší právě tehdy, když existuje n antiřetězců $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$, které pokrývají X, tj. $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = X$.
- Antiřetězec $\{a_1, \ldots, a_m\} \subseteq X$ je největší právě tehdy, když existuje m řetězců $R_1, \ldots, R_m \subseteq X$, které pokrývají X, tj. $\bigcup_{k=1}^{m} R_k = X$.

Úloha 1: Najděte

a) bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$;

b) bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}^2$.

Úloha 2: Dokažte, že pro prosté zobrazení $f\colon X \to Y$ platí $f \circ g = f \circ h \implies g = h$ pro každé $g, h\colon W \to X$.

Úloha 3: Uvažme relaci "x je dělitelem čísla y" na množině $\{1, \ldots, n\}$.

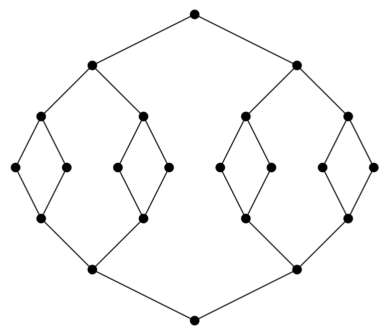
a) Dokažte, že tato relace je uspořádání.

b) Má toto uspořádání nějaký největší a nejmenší prvek?

c) Má toto uspořádání nějaký minimální a maximální prvek?

d) Čemu v tomto uspořádání odpovídá infimum a supremum neprázdné podmnožiny?

Úloha 4: U uspořádání daného následujícím Hasseho diagramem vyznačte nějaký nejdelší řetězec a antiřetězec. Zdůvodněte, proč nelze najít delší, resp. větší.



Úloha 5: Najděte příklad lineárně uspořádané množiny s nejmenším a největším prvkem, ve které existuje podmnožina, která nemá supremum ani infimum.