

Úlohy ke cvičení

Definice: Jako *relaci* R nazveme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $X \times Y$. Neboli $R \subseteq X \times Y$. Pokud $X = Y$, pak o R hovoříme jako o *relaci na* X . Místo $(x, y) \in R$ často píšeme xRy . Relací R^{-1} rozumíme $R^{-1} = \{(x, y); (y, x) \in R\}$.

Definice: Relace R na množině X je:

- *reflexivní*, pokud pro každé $x \in X$ platí xRx ,
- *symetrická*, pokud xRy implikuje yRx ,
- *antisymetrická*, pokud xRy a yRx implikuje $x = y$,
- *tranzitivní*, pokud xRy a yRz implikuje xRz .

Definice: Relace na množině X se nazývá

- *ekvivalence*, pokud je reflexivní, symetrická a tranzitivní,
- (*částečné*) *uspořádání*, pokud je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Definice: Mějme relace $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$. Pak *složení* relací R, S je relace $R \circ S \subseteq X \times Z$ definovaná následovně: $xR \circ Sz$ právě tehdy, když existuje $y \in Y$ takové, že xRy a zároveň ySz .

Definice: Relace $f \subseteq X \times Y$ se nazývá *zobrazení*, pokud pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$ takové, že xfy . Takové y značíme $f(x)$. Zobrazení pak značíme $f: X \rightarrow Y$.

Definice: Zobrazení $f: X \rightarrow Y$ se nazývá

- *prosté (injektivní)*, pokud $f(x_1) = f(x_2)$ implikuje $x_1 = x_2$,
- *na (surjektivní)*, pokud pro každé $y \in Y$ existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = y$,
- *vzájemně jednoznačné (bijektivní)*, pokud je prosté a na.

Úloha 1: Nakresleme n přímk v rovině tak, že žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři se neprotínají v jednom bodě. Dokažte matematickou indukcí, že rovina je těmito přímkami rozdělena na přesně $n(n+1)/2 + 1$ částí.

Úloha 2: Rozhodněte, které z následujících relací jsou reflexivní, symetrické, tranzitivní a antisymetrické.

a) $X = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, a), (c, c)\}$

b) $X = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, a), (c, c)\}$

c) $(X, R) = (\mathbb{N}, \leq)$,

d) $X = \{1, 2, \dots, 10\}$, $R = \{(x, y) : nsd(x, y) = 1\}$, neboli x a y jsou nesoudělné.

Úloha 3: Buďte R a S reflexivní relace na téže množině. Které z následujících relací jsou také reflexivní?

a) $R \cup S$

b) $R \cap S$

c) $R \setminus S$

d) $R \oplus S$

e) $R \circ S$

f) R^{-1}

Úloha 4: Určete počet relací na n prvcích:

— všech,

— reflexivních,

— symetrických,

— antisymetrických.

Úloha 5: Určete počet různých ekvivalencí na pěti prvcích.

Úloha 6: Buďte X, Y konečné množiny takové, že $|X| \leq |Y|$.

a) Určete počet všech zobrazení $f: X \rightarrow Y$.

b) Určete počet prostých zobrazení $f: X \rightarrow Y$.

c) Určete počet vzájemně jednoznačných zobrazení $f: X \rightarrow X$.

Úloha 7: Najděte

a) bijekci mezi \mathbb{N} a \mathbb{Z} ;

b) bijekci mezi \mathbb{N} a \mathbb{N}^2 ;

c) prosté zobrazení z \mathbb{Q} do \mathbb{N} . (Nebo dokonce zkonstruuje bijekci.)