Úlohy ke cvičení

Definice: Pro graf $G = (V, E)$ a přirozené číslo k nazveme zobrazení $b\colon V \to \{1, \dots, k\}$ *obarvením grafu G pomocí k barev*, pokud pro každé dva vrcholy $u, v \in V$ platí $\{u, v\} \in E \implies b(u) \neq b(v)$. Barevnost grafu G, kterou značíme $\chi(G)$, je pak minimální počet barev potřebný k obarvení G.

Věta: Graf je rovinný právě tehdy, když neobsahuje podrozdelení $K_{3,3}$ ani K_5 jako podgraf.

Věta: Je-li $G = (V, E)$ rovinný graf s alespoň 3 vrcholy, pak $|E| \leq 3|V| - 6$. Pokud navíc G neobsahuje trojúhelník jako podgraf, pak platí $|E| \leq 2|V| - 4$.

Věta: Buď $G = (V, E)$ rovinný graf a ať s označuje počet jeho stěn. Pak platí $|V| - |E| + s = 2$.

Věta: Buď G rovinný graf s v vrcholy, h hranami a s stěnami. Pak $v - h + s = 2$.

Úloha 1: Existuje kubický (tj. 3-regulární) rovinný graf, který obsahuje:

a) právě 12 šestiúhelníkových stěn (a žádné další)?

b) právě 12 pětiúhelníkových stěn (a žádné další)?

c) jednu dvacetiúhelníkovou stěnu a deset pětiúhelníkových stěn (a žádné další)?

Úloha 2: Ukažte, že má-li rovinný graf sudé stupně, pak je barevnost jeho duálu rovna dvěma.

Úloha 3: Ukažte, že neexistuje eulerovský rovinný graf jehož stěny by tvořil jeden pěticyklus a samé trojúhelníky.