

Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Zjistěte, které z následujících podmínek nejsou ekvivalentní podmínce $A \subseteq B$. Pokuste se ji upravit tak, aby ekvivalence platila a to pokud možno co nejmenším zásahem.

- a) $A \setminus B = \emptyset$
- b) $A \cup B = B$
- c) $A \cap B = A$
- d) $\overline{A} \setminus B \subseteq \overline{B}$
- e) $A \cap \overline{B} = \emptyset$
- f) $\overline{A} \subseteq \overline{B}$

Úloha 2: Zjistěte, které z následujících vztahů pro symetrickou diferenci \oplus definovanou $A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ platí a které neplatí.

- a) $A \oplus B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$
- b) $A \oplus B = B \oplus A$
- c) $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$
- d) $A \oplus (B \oplus A) = A$
- e) $A \oplus A = \emptyset$
- f) $A \oplus \emptyset = A$

Pokud neplatí, opravte ji pokud možno co nejmenším zásahem.

Úloha 3: Dokažte matematickou indukci:

- a) $\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}(n^2 + n)$.
- b) $\sum_{i=0}^n 2i + 1 = (n + 1)^2$.
- c) $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$.

Úloha 4: Nakresleme n přímk v rovině tak, že žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři se neprotínají v jednom bodě. Dokažte matematickou indukci, že rovina je těmito přímkami rozdělena na přesně $n(n + 1)/2 + 1$ částí.

Úloha 5: Skupina odsouzených vězňů získala šanci se zachránit. Následující den každý vězeň dostane náhodně buď červenou, nebo černou čepici. Poté budou postaveni do řady tak, že každý vidí všechny vězně a jejich čepice před sebou, ale nikoho za sebou. Zároveň žádný vězeň neví, jakou má čepici. Vězni budou postupně od posledního v řadě voláni, aby řekli barvu svoji čepice. Pokud barvu uhádnou, bude jim udělena milost. Každý vězeň zároveň slyší, co říkají spoluvězni stojící za ním (tedy ti, kteří jsou voláni před ním). Přes noc mají vězni možnost domluvit se na strategii. Najděte strategii, která maximalizuje počet zachráněných vězňů.

Úloha 6: V zábavném pořadu *Let's Make a Deal* nabízel moderátor Monty Hall výhru pod následujícími pravidly: Výhra, automobil, je schovaná za jedněmi ze tří dveří. Za zbylými dvěma je cena útěchy, koza. Hráč nejprve na některé dveře ukáže. Moderátor, který ví, kde se skrývá výhra, otevře z ostatních dvou dveří ty, za kterými výhra není. V této situaci má hráč otevřít jedny ze zbylých dvou dveří, aby dostal, co se za nimi skrývá.

Je pro hráče výhodné změnit názor a otevřít jiné dveře, než na které původně ukázal?