Úlohy ke cvičení

Definice: Graf $G = (V, E)$ je dvojice, která sestává z množiny *vrcholů* V a z množiny *hran* $E \subseteq \{\{u, v\}; u, v \in V, u \neq v\}$.

Definice: Graf $G = (V_G, E_G)$ je *izomorfní* grafu $H = (V_H, E_H)$, pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $f\colon V_G \to V_H$ takové, že $(u, v) \in E_G \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E_H$.

Definice: Graf se nazýva *bipartitní*, pokud můžeme rozdělit jeho vrcholy do dvou disjunktních množin tak, že mezi žádnými dvěma vrcholy ze stejné množiny nevede hrana.

Definice: Graf $G = (V_G, E_G)$ je

- *podgraf* grafu $H = (V_H, E_H)$, pokud $V_G \subseteq V_H$ a $E_G \subseteq V_H \cap \binom{V_G}{2}$.
- *indukovaný podgraf* $H = (V_H, E_H)$, pokud $V_G \subseteq V_H$ a $E_G = V_H \cap \binom{V_G}{2}$.

Definice: Graf se nazývá *k-regulární*, pokud má všechny vrcholy stupně k.

Věta: Každý graf obsahuje sudý počet vrcholů lichého stupně.

Definice: Uzavřený sled $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_{m-1}, v_{m-1}, e_m, v_0)$ v grafu G je *eulerovský*, pokud se v něm každá hrana grafu G vyskytuje právě jednou a každý vrchol alespoň jednou. Graf se nazývá *eulerovský*, pokud v něm existuje eulerovský sled.

Věta: Graf je eulerovský právě tehdy, když neobsahuje žádný vrchol lichého stupně.

Úloha 1: Ukažte, že pokud je graf s alespoň dvěma vrcholy i jeho doplněk souvislý, pak obsahuje cestu délky 3 jako indukovaný podgraf.

Úloha 2: Charakterizujte grafy, které neobsahují cestu délky 3 jako indukovaný podgraf.

Úloha 3: Ukažte, že pokud má $2k$-regulární graf sudý počet hran, tak k nebo $|V_G|$ je sudé.

Úloha 4: Dokažte, že graf se všemi stupni sudými neobsahuje most, tedy hranu, jejímž odebráním se zvýší počet komponent.

Úloha 5: Charakterizujte všechny grafy, které mají (ne nutně uzavřený) eulerovský tah.

Úloha 6: Dokažte, že hrany každého eulerovského grafu lze rozložit na disjunktní sjednocení kružnic.

Úloha 7: Ukažte, že každý graf s $m \geq 2$ hranami má bipartitní podgraf s alespoň $\frac{m}{2}$ hranami.