

Úlohy ke cvičení

Multinomická věta:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_m=n \\ k_1, k_2, \dots, k_m \geq 0}} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m},$$

kde $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_m!}$.

Princip inkluze a exkluze: Necht A_1, \dots, A_n jsou konečné množiny. Pak platí

$$\left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Definice: Bud A konečná množina a $\pi: A \rightarrow A$ permutace na množině A (tj. vzájemně jednoznačné zobrazení). Řekneme, že π má *pevný bod*, pokud existuje $a \in A$ takové, že $\pi(a) = a$. Počet permutací bez pevného bodu na n -prvkové množině pak značíme $\check{s}(n)$.

Úloha 1: Kolik členů má rozvoj $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$ podle multinomické věty?

Úloha 2: Dokažte vztah

$$\check{s}(n) = n! - n\check{s}(n-1) - \binom{n}{2}\check{s}(n-2) - \cdots - \binom{n}{n-1}\check{s}(1) - 1.$$

Úloha 3: Kolik existuje ekvivalencí na n -prvkové množině?

Úloha 4: Určete počet přirozených čísel mezi 1 a 840, která nejsou dělitelná 6, 10 ani 14.

Úloha 5: Profesor Plešohlav zjistil, že stejné konference se účastní 5 jeho přátel. Z těchto pěti lidí potkal během přednášek:

- každého jednotlivce $10\times$,
- každou dvojici $5\times$,
- každou trojici $3\times$,
- každou čtveřici $2\times$,
- celou pěticí $1\times$.

Kolik přednášek měla konference, pokud profesor potkal na každé přednášce někoho ze svých přátel?