Úlohy ke cvičení

Definice: Jako *relaci* R nazveme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $X \times Y$. Neboli $R \subseteq X \times Y$. Pokud $X = Y$, pak o R hovoříme jako o *relaci na* X. Místo $(x, y) \in R$ často píšeme xRy. Relací R^{-1} rozumíme $R^{-1} = \{(x, y); (y, x) \in R\}$.

Definice: Relace R na množině X je:

- *reflexivní*, pokud pro každé $x \in X$ platí xRx,
- *symetrická*, pokud xRy implikuje yRx,
- *antisymetrická*, pokud xRy a yRx implikuje $x = y$,
- *tranzitivní*, pokud xRy a yRz implikuje xRz.

Definice: Relace na množině X se nazývá

- *ekvivalence*, pokud je reflexivní, symetrická a tranzitivní,
- *(částečné) uspořádání*, pokud je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Definice: Buď $(X, \preceq)$ částečně uspořádaná množina. Prvek $a \in X$ se nazývá

- *největší prvek*, pokud pro každé $x \in X$ platí $x \preceq a$,
- *maximální prvek*, pokud neexistuje $x \in X$ takové, že $a \prec x$.

Analogicky definujeme *nejmenší* a *minimální prvek*.

Definice: Buď $(X, \preceq)$ částečně uspořádaná množina a $M \subseteq X$ její podmnožina. Prvek $a \in X$ se nazývá *horní mez* množiny M, pokud pro všechna $m \in M$ platí $m \preceq a$. Nejmenší horní mez (pokud existuje) se nazývá *supremum*. Analogicky definujeme *dolní mez* a *infimum*.

Definice: Relace $f \subseteq X \times Y$ se nazývá *zobrazení*, pokud pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$ takové, že xfy. Takové y značíme $f(x)$. Zobrazení pak značíme $f\colon X \to Y$.

Definice: Zobrazení $f\colon X \to Y$ se nazývá

- *prosté (injektivní)*, pokud $f(x_1) = f(x_2)$ implikuje $x_1 = x_2$,
- *na (surjektivní)*, pokud pro každé $y \in Y$ existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = y$,
- *vzájemně jednoznačné (bijektivní)*, pokud je prosté a na.

Úloha 1: Určete počet relací na n prvcích:
— všech,
— reflexivních,
— symetrických,
— antisymetrických.

Úloha 2: Buďte X, Y konečné množiny takové, že $|X| \leq |Y|$.

a) Určete počet všech zobrazení $f\colon X \to Y$.

b) Určete počet prostých zobrazení $f\colon X \to Y$.

c) Určete počet vzájemně jednoznačných zobrazení $f\colon X \to X$.

Úloha 3: Najděte

a) bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$;

b) bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}^2$;

c) prosté zobrazení z $\mathbb{Q}$ do $\mathbb{N}$. (Nebo dokonce zkonstruujte bijekci.)

Úloha 4: Dokažte, že zobrazení $f\colon X \to Y$ je

a) prosté právě tehdy, když platí $f \circ g = f \circ h \implies g = h$ pro každé $g, h\colon W \to X$,

b) na právě tehdy, když platí $g \circ f = h \circ f \implies g = h$ pro každé $g, h\colon Y \to Z$.

Úloha 5: Uvažme relaci "x je dělitelem čísla y" na množině $\{1, \ldots, n\}$.

a) Dokažte, že tato relace je uspořádání.

b) Má toto uspořádání nějaký největší a nejmenší prvek?

c) Má toto uspořádání nějaký minimální a maximální prvek?

d) Čemu v tomto uspořádání odpovídá infimum a supremum neprázdné podmnožiny?

Úloha 6: Dokažte, že pokud má v uspořádané množině každá podmnožina supremum, má v ní také každá podmnožina infimum.
