

## Úlohy ke cvičení

*Definice:* Pro graf  $G = (V, E)$  a přirozené číslo  $k$  nazveme zobrazení  $b: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$  *obarvením grafu  $G$  pomocí  $k$  barev*, pokud pro každé dva vrcholy  $u, v \in V$  platí  $\{u, v\} \in E \implies b(u) \neq b(v)$ . Barevnost grafu  $G$ , kterou značíme  $\chi(G)$ , je pak minimální počet barev potřebný k obarvení  $G$ .

*Věta:* Graf je rovinný právě tehdy, když neobsahuje podrozdělení  $K_{3,3}$  ani  $K_5$  jako podgraf.

*Věta:* Je-li  $G = (V, E)$  rovinný graf s alespoň 3 vrcholy, pak  $|E| \leq 3|V| - 6$ . Pokud navíc  $G$  neobsahuje trojúhelník jako podgraf, pak platí  $|E| \leq 2|V| - 4$ .

*Věta:* Buď  $G = (V, E)$  rovinný graf a  $s$  označuje počet jeho stěn. Pak platí  $|V| - |E| + s = 2$ .

---

*Úloha 1:* Zpívejte koledy.

*Úloha 2:* Dokažte, že doplněk rovinného grafu s 11 vrcholy nemůže být rovinný.

*Úloha 3:* Dokažte, že odhad  $|E| \leq 2|V| - 4$  pro rovinné grafy bez trojúhelníku je nejlepší možný.

*Úloha 4:* Nakreslete  $K_5$ ,  $K_6$  na torus.

*Úloha 5:* Najděte rovinný graf, který má stupně všech vrcholů 5.

*Úloha 6:* Dokažte větu o čtyřech barvách pro rovinný graf bez trojúhelníku.

*Úloha 7:* Označíme jako  $\delta(G)$  minimální stupeň grafu  $G$ . Dokažte, že barevnost  $G$  je menší nebo rovna  $1 + \max\{\delta(G'); G' \text{ je podgraf } G\}$ .