

## Úlohy ke cvičení

*Definice:* Graf se nazývá *strom*, pokud je souvislý a neobsahuje cyklus jako podgraf. *Kostra* grafu je jeho podgraf na všech jeho vrcholech, který je stromem.

*Věta:* Pro každé  $n \geq 2$  je počet koster grafu  $K_n$  roven  $n^{n-2}$ .

*Definice:* Pro graf  $G = (V, E)$  a přirozené číslo  $k$  nazveme zobrazení  $b: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$  *obarvením grafu  $G$  pomocí  $k$  barev*, pokud pro každé dva vrcholy  $u, v \in V$  platí  $\{u, v\} \in E \implies b(u) \neq b(v)$ . Barevnost grafu  $G$ , kterou značíme  $\chi(G)$ , je pak minimální počet barev potřebný k obarvení  $G$ .

*Definice:* Buď  $G(V, E)$  graf a  $e = \{u, v\} \in E$  jeho hrana. Pak je graf vzniklý *kontrakcí hrany  $e$*  definován následovně. Množina vrcholů je rovna  $V \setminus \{u, v\} \cup \{w\}$ , množinu hran získáme z  $E$  odebráním všech hran, které obsahují  $u$  nebo  $v$ , a všechny sousedy  $u, v$  spojíme s novým vrcholem  $w$ .

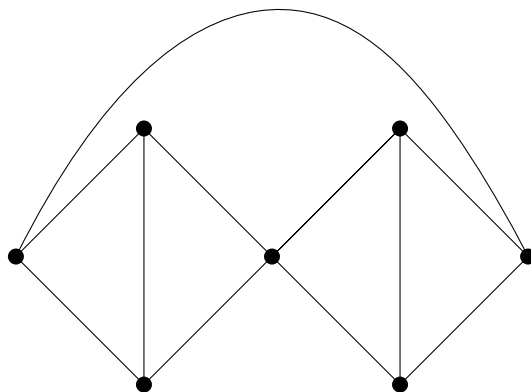
Graf  $H$  se nazývá *minor* grafu  $G$ , pokud lze získat z  $G$  posloupností následujících operací: smazání hrany, smazání vrcholu a kontrakce hrany.

*Definice:* Graf se nazývá *bipartitní*, pokud můžeme rozdělit jeho vrcholy do dvou disjunktních množin tak, že mezi žádnými dvěma vrcholy ze stejné množiny nevede hrana.

*Úloha 1:* Určete počet koster grafu  $K_{2,n}$ .

*Úloha 2:* Určete počet koster úplného grafu bez jedné hrany.

*Úloha 3:* Určete barevnost grafu na obrázku níže.



*Úloha 4:* Ukažte, že pokud graf neobsahuje lichý cyklus, pak je bipartitní.