Úlohy ke cvičení

Definice: Graf $G = (V, E)$ je dvojice, která sestává z množiny *vrcholů* V a z množiny *hran* $E \subseteq \{\{u, v\}; u, v \in V, u \neq v\}$.

Definice: Graf $G = (V_G, E_G)$ je *izomorfní* grafu $H = (V_H, E_H)$, pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $f\colon V_G \to V_H$ takové, že $(u, v) \in E_G \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E_H$.

Definice: Graf se nazýva *bipartitní*, pokud můžeme rozdělit jeho vrcholy do dvou disjunktních množin tak, že mezi žádnými dvěma vrcholy ze stejné množiny nevede hrana.

Definice: Graf $G = (V_G, E_G)$ je

- *podgraf* grafu $H = (V_H, E_H)$, pokud $V_G \subseteq V_H$ a $E_G \subseteq V_H \cap \binom{V_G}{2}$.
- *indukovaný podgraf* $H = (V_H, E_H)$, pokud $V_G \subseteq V_H$ a $E_G = V_H \cap \binom{V_G}{2}$.

Definice: Graf se nazývá *strom*, pokud je souvislý a neobsahuje cyklus jako podgraf.

Kostra grafu je jeho podgraf na všech jeho vrcholech, který je stromem.

Věta: Pro každý graf $G = (V, E)$ platí

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|,$$

kde $\deg(v)$ je stupeň vrcholu v neboli počet hran, ve kterých se nachází.

Věta: Nechť $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ je posloupnost přirozených čísel. Předpokládejme, že $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$, a označme symbolem D' posloupnost $(d'_1, d'_2, \ldots, d'_{n-1})$, kde

$$d'_i = \begin{cases} d_i & \text{pro } i < n - d_n, \\ d_i - 1 & \text{pro } i \geq n - d_n. \end{cases}$$

Potom D je skóre grafu právě tehdy, když D' je skóre grafu.

Definice: Uzavřený sled $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_{m-1}, v_{m-1}, e_m, v_0)$ v grafu G je *eulerovský*, pokud se v něm každá hrana grafu G vyskytuje právě jednou a každý vrchol alespoň jednou. Graf se nazývá *eulerovský*, pokud v něm existuje eulerovský sled.

Věta: Graf je eulerovský právě tehdy, když neobsahuje žádný vrchol lichého stupně.

Úloha 1: Dokažte, že graf se všemi stupni sudými neobsahuje most, tedy hranu, jejímž odebráním se zvýší počet komponent.

Úloha 2: Ukažte, že každý graf s $m \geq 2$ hranami má bipartitní podgraf s alespoň $\frac{m}{2}$ hranami.

Úloha 3: Najděte příklad dvou neizomorfních grafů (dvou stromů, stromu a grafu, co není strom) se stejným skóre.

Úloha 4: Ověřte, zdali je posloupnost $(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5)$ skóre grafu. Pokud ano, sestrojte graf, který má takové skóre.

Úloha 5: Mějme strom, který má $l > 0$ listů a v vnitřních vrcholů, přičemž každý vnitřní vrchol má stupeň 3. Dokažte, že vždy platí $l = v + 2$.

Úloha 6: Ukažte, že pro každou kostru K grafu G a hranu $e \in E_G \setminus E_K$ existují dvě hrany kostry e' a e'' takové, že jak $(K \setminus e') \cup e$ tak $(K \setminus e'') \cup e$ jsou opět kostry grafu G.

Úloha 7: Určete počet koster grafu $K_{2,n}$.