

## Úlohy ke cvičení

*Definice:* Graf  $G = (V, E)$  je dvojice, která sestává z množiny vrcholů  $V$  a z množiny hran  $E \subseteq \{\{u, v\}; u, v \in V, u \neq v\}$ .

*Definice:* Graf  $G = (V_G, E_G)$  je *izomorfní* grafu  $H = (V_H, E_H)$ , pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení  $f: V_G \rightarrow V_H$  takové, že  $(u, v) \in E_G \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E_H$ .

*Definice:* Graf se nazývá *bipartitní*, pokud můžeme rozdělit jeho vrcholy do dvou disjunktních množin tak, že mezi žádnými dvěma vrcholy ze stejné množiny nevede hrana.

*Definice:* Graf  $G = (V_G, E_G)$  je

- *podgraf* grafu  $H = (V_H, E_H)$ , pokud  $V_G \subseteq V_H$  a  $E_G \subseteq E_H \cap (V_G \times V_G)$ .
- *indukovaný podgraf*  $H = (V_H, E_H)$ , pokud  $V_G \subseteq V_H$  a  $E_G = E_H \cap (V_G \times V_G)$ .

*Definice:* Graf se nazývá *k-regulární*, pokud má všechny vrcholy stupně  $k$ .

*Věta:* Každý graf obsahuje sudý počet vrcholů lichého stupně.

*Definice:* Uzavřený sled  $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_{m-1}, v_{m-1}, e_m, v_0)$  v grafu  $G$  je *eulerovský*, pokud se v něm každá hrana grafu  $G$  vyskytuje právě jednou a každý vrchol alespoň jednou. Graf se nazývá *eulerovský*, pokud v něm existuje eulerovský sled.

*Věta:* Graf je eulerovský právě tehdy, když neobsahuje žádný vrchol lichého stupně.

*Úloha 1:* Ukažte, že pokud je graf s alespoň dvěma vrcholy i jeho doplněk souvislý, pak obsahuje cestu délky 3 jako indukovaný podgraf.

*Úloha 2:* Charakterizujte grafy, které neobsahují cestu délky 3 jako indukovaný podgraf.

*Úloha 3:* Ukažte, že pokud má  $2k$ -regulární graf sudý počet hran, tak  $k$  nebo  $|V_G|$  je sudé.

*Úloha 4:* Dokažte, že graf se všemi stupni sudými neobsahuje most, tedy hranu, jejímž odebráním se zvýší počet komponent.

*Úloha 5:* Charakterizujte všechny grafy, které mají (ne nutně uzavřený) eulerovský tah.

*Úloha 6:* Dokažte, že hrany každého eulerovského grafu lze rozložit na disjunktní sjednocení kružnic.

*Úloha 7:* Ukažte, že každý graf s  $m \geq 2$  hranami má bipartitní podgraf s alespoň  $\frac{m}{2}$  hranami.