Úlohy ke cvičení

Binomická věta: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$.

Princip inkluze a exkluze: Nechť $A_1, \ldots A_n$ jsou konečné množiny. Pak platí

$$\left| \bigcup_{k=1}^{n} A_k \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Definice: Graf $G = (V, E)$ je dvojice, která sestává z množiny *vrcholů* V a z množiny *hran* $E \subseteq \{\{u,v\}; u, v \in V, u \neq v\}$.

Úloha 1: Stavař Pavel nabírá dělníky pro stavbu nového domu. Každý z 80 dělníků, kteří se přihlásili do náboru, ovládá alespoň jednu z profesí: zedník, tesař, malíř, dokonce jich 15 ovládá všechny tři profese. Dále Pavel zjistil, že zdít umí 50 zájemců o práci a že mezi zájemci je i stejný počet malířů. Tesařské řemeslo ovládá jen 45 zájemců.

Kolik by Pavel najal pracovníků, kdyby vybral všechny takové, co ovládají právě dvě profese?

Úloha 2: Kolik existuje grafů na n vrcholech bez izolovaných vrcholů.

Vrchol je izolovaný, pokud nepatří do žádné hrany.

Úloha 3: Kolik existuje rozdělení do dvojic ve skupině $2n$ lidí.

Úloha 4: Dokažte, že platí následující odhady kombinačního čísla $\binom{2n}{n}$.

a) $\dfrac{4^n}{2n+1} \leq \dbinom{2n}{n} \leq 4^n$

b) $\displaystyle\prod_{\substack{n<p\leq 2n \\ p \text{ je prvočíslo}}} p \leq \binom{2n}{n}$