# Úlohy ke cvičení

*Multinomická věta:*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_m=n \\ k_1,k_2,\ldots,k_m \geq 0}} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m},$$

kde $\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$.

*Princip inkluze a exkluze:* Nechť $A_1, \ldots A_n$ jsou konečné množiny. Pak platí

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

*Definice:* Buď $A$ konečná množina a $\pi\colon A \to A$ permutace na množině $A$ (tj. vzájemně jednoznačné zobrazení). Řekneme, že $\pi$ má *pevný bod*, pokud existuje $a \in A$ takové, že $\pi(a) = a$. Počet permutací bez pevného bodu na $n$-prvkové množině pak značíme $\check{s}(n)$.

---

*Úloha 1:* Kolik členů má rozvoj $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$ podle multinomické věty?

*Úloha 2:* Dokažte vztah

$$\check{s}(n) = n! - n\check{s}(n-1) - \binom{n}{2}\check{s}(n-2) - \cdots - \binom{n}{n-1}\check{s}(1) - 1.$$

*Úloha 3:* Kolik existuje ekvivalencí na $n$-prvkové množině?

*Úloha 4:* Určete počet přirozených čísel mezi 1 a 840, která nejsou dělitelná 6, 10 ani 14.

*Úloha 5:* Profesor Plešohlav zjistil, že stejné konference se účastní 5 jeho přátel. Z těchto pěti lidí potkal během přednášek:
— každého jednotlivce 10×,
— každou dvojici 5×,
— každou trojici 3×,
— každou čtveřici 2×,
— celou pětici 1×.

Kolik přednášek měla konference, pokud profesor potkal na každé přednášce někoho ze svých přátel?