Úlohy ke cvičení

Definice: Relace R na množině X se nazývá *(částečné) uspořádání*, pokud je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Uspořádání $(X, \preceq)$ se nazvývá *úplné (lineární)*, pokud pro každé dva prvky $x, y \in X$ platí $x \preceq y$ nebo $y \preceq x$.

Definice: Buď $(X, \preceq)$ částečně uspořádaná množina a $M \subseteq X$ její podmnožina. Pak M se nazývá

- *řetězec*, pokud pro každé $m_1, m_2 \in M$ platí $m_1 \preceq m_2$ nebo $m_2 \preceq m_1$. Neboli každé dva prvky z M jsou porovnatelné.
- *Antiřetězec*, pokud pro každé dva různé $m_1, m_2 \in M$ platí $m_1 \not\preceq m_2$ ani $m_2 \not\preceq m_1$. Neboli každé dva různé prvky z M jsou neporovnatelné.

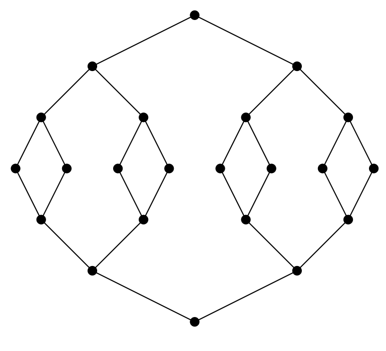
Věta: Buď $(X, \preceq)$ částečně uspořádaná konečná množina. Pak platí:

- Řetězec $\{r_1, \dots, r_n\} \subseteq X$ je nejdelší právě tehdy, když existuje n antiřetězců $A_1, \dots, A_n \subseteq X$, které pokrývají X, tj. $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = X$.
- Antiřetězec $\{a_1, \dots, a_m\} \subseteq X$ je největší právě tehdy, když existuje m řetězců $R_1, \dots, R_m \subseteq X$, které pokrývají X, tj. $\bigcup_{k=1}^{m} R_k = X$.

Úloha 1: Najděte příklad lineárně uspořádané množiny s nejmenším a největším prvkem, ve které existuje podmnožina, která nemá supremum ani infimum.

Úloha 2: Dokažte, že pokud má v uspořádané množině každá podmnožina supremum, má v ní také každá podmnožina infimum.

Úloha 3: U uspořádání daného následujícím Hasseho diagramem vyznačte nějaký nejdelší řetězec a antiřetězec. Zdůvodněte, proč nelze najít delší, resp. větší.



Úloha 4: Rozhodněte, zdali v každém konečném a neprázdném částečném uspořádání musí každý maximální řetězec protínat:

a) antiřetězec tvořený maximálními prvky,

b) každý maximální antiřetězec.

Úloha 5:

a) Ukažte, že pro každou konečnou množinu platí, že všechna její lineární uspořádání jsou navzájem izomorfní.

Pozn.: Relace R na X je *izomorfní* relaci S na Y, pokud existuje bijekce $f\colon X \to Y$ taková, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in S$.

b) Ukažte, že pro každou množinu A přirozených čísel platí, že všechna lineární uspořádání množiny A jsou navzájem izomorfní, právě když A je konečná.