Úlohy ke cvičení

Definice: Jako *relaci* R nazveme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $X \times Y$. Neboli $R \subseteq X \times Y$. Pokud $X = Y$, pak o R hovoříme jako o *relaci na* X. Místo $(x, y) \in R$ často píšeme xRy. Relací R^{-1} rozumíme $R^{-1} = \{(x, y); (y, x) \in R\}$.

Definice: Relace R na množině X je:

- *reflexivní*, pokud pro každé $x \in X$ platí xRx,
- *symetrická*, pokud xRy implikuje yRx,
- *antisymetrická*, pokud xRy a yRx implikuje $x = y$,
- *tranzitivní*, pokud xRy a yRz implikuje xRz.

Definice: Relace na množině X se nazývá

- *ekvivalence*, pokud je reflexivní, symetrická a tranzitivní,
- *(částečné) uspořádání*, pokud je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Definice: Mějme relace $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$. Pak *složení* relací R, S je relace $R \circ S \subseteq X \times Z$ definovaná následovně: $xR \circ Sz$ právě tehdy, když existuje $y \in Y$ takové, že xRy a zároveň ySz.

Definice: Relace $f \subseteq X \times Y$ se nazývá *zobrazení*, pokud pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$ takové, že xfy. Takové y značíme $f(x)$. Zobrazení pak značíme $f\colon X \to Y$.

Definice: Zobrazení $f\colon X \to Y$ se nazývá

- *prosté (injektivní)*, pokud $f(x_1) = f(x_2)$ implikuje $x_1 = x_2$,
- *na (surjektivní)*, pokud pro každé $y \in Y$ existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = y$,
- *vzájemně jednoznačné (bijektivní)*, pokud je prosté a na.

Úloha 1: Nakresleme n přímek v rovině tak, že žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři se neprotínají v jednom bodě. Dokažte matematickou indukcí, že rovina je těmito přímkami rozdělena na přesně $n(n+1)/2 + 1$ částí.

Úloha 2: Rozhodněte, které z následujících relací jsou reflexivní, symetrické, tranzitivní a antisymetrické.

a) $X = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, a), (c, c)\}$

b) $X = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, a), (c, c)\}$

c) $(X, R) = (\mathbb{N}, \leq)$,

d) $X = \{1, 2, \dots, 10\}$, $R = \{(x, y) : nsd(x, y) = 1\}$, neboli x a y jsou nesoudělné.

Úloha 3: Buďte R a S reflexivní relace na téže množině. Které z následujicích relací jsou také reflexivní?

a) $R \cup S$

b) $R \cap S$

c) $R \setminus S$

d) $R \oplus S$

e) $R \circ S$

f) R^{-1}

Úloha 4: Určete počet relací na n prvcích:
— všech,
— reflexivních,
— symetrických,
— antisymetrických.

Úloha 5: Určete počet různých ekvivalencí na pěti prvcích.

Úloha 6: Buďte X, Y konečné množiny takové, že $|X| \leq |Y|$.

a) Určete počet všech zobrazení $f\colon X \to Y$.

b) Určete počet prostých zobrazení $f\colon X \to Y$.

c) Určete počet vzájemně jednoznačných zobrazení $f\colon X \to X$.

Úloha 7: Najděte

a) bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$;

b) bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}^2$;

c) prosté zobrazení z $\mathbb{Q}$ do $\mathbb{N}$. (Nebo dokonce zkonstruujte bijekci.)