Úlohy ke cvičení

Definice: Pro graf $G = (V, E)$ a přirozené číslo k nazveme zobrazení $b\colon V \to \{1, \dots, k\}$ *obarvením grafu G pomocí k barev*, pokud pro každé dva vrcholy $u, v \in V$ platí $\{u, v\} \in E \implies b(u) \neq b(v)$. Barevnost grafu G, kterou značíme $\chi(G)$, je pak minimální počet barev potřebný k obarvení G.

Věta: Graf je rovinný právě tehdy, když neobsahuje podrozdelení $K_{3,3}$ ani K_5 jako podgraf.

Věta: Je-li $G = (V, E)$ rovinný graf s alespoň 3 vrcholy, pak $|E| \leq 3|V| - 6$. Pokud navíc G neobsahuje trojúhelník jako podgraf, pak platí $|E| \leq 2|V| - 4$.

Věta: Buď $G = (V, E)$ rovinný graf a ať s označuje počet jeho stěn. Pak platí $|V| - |E| + s = 2$.

Úloha 1: Zpívejte koledy.

Úloha 2: Dokažte, že doplněk rovinného grafu s 11 vrcholy nemůže být rovinný.

Úloha 3: Dokažte, že odhad $|E| \leq 2|V| - 4$ pro rovinné grafy bez trojúhelníku je nejlepší možný.

Úloha 4: Nakreslete K_5, K_6 na torus.

Úloha 5: Najděte rovinný graf, který má stupně všech vrcholů 5.

Úloha 6: Dokažte větu o čtyřech barvách pro rovinný graf bez trojúhelníku.

Úloha 7: Označíme jako $\delta(G)$ minimální stupeň grafu G. Dokažte, že barevnost G je menší nebo rovna $1 + \max\{\delta(G'); G' \text{ je podgraf G}\}$.