

## Úlohy ke cvičení

*Definice:* Graf  $G = (V, E)$  je dvojice, která sestává z množiny vrcholů  $V$  a z množiny hran  $E \subseteq \{\{u, v\}; u, v \in V, u \neq v\}$ .

*Definice:* Graf  $G = (V_G, E_G)$  je izomorfní grafu  $H = (V_H, E_H)$ , pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení  $f: V_G \rightarrow V_H$  takové, že  $(u, v) \in E_G \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E_H$ .

*Definice:* Graf se nazývá *bipartitní*, pokud můžeme rozdělit jeho vrcholy do dvou disjunktních množin tak, že mezi žádnými dvěma vrcholy ze stejné množiny nevede hrana.

*Definice:* Graf  $G = (V_G, E_G)$  je

- *podgraf* grafu  $H = (V_H, E_H)$ , pokud  $V_G \subseteq V_H$  a  $E_G \subseteq V_H \cap \binom{V_G}{2}$ .
- *indukovaný podgraf*  $H = (V_H, E_H)$ , pokud  $V_G \subseteq V_H$  a  $E_G = V_H \cap \binom{V_G}{2}$ .

*Definice:* Graf se nazývá *strom*, pokud je souvislý a neobsahuje cyklus jako podgraf.

*Kostra* grafu je jeho podgraf na všech jeho vrcholech, který je stromem.

*Věta:* Pro každý graf  $G = (V, E)$  platí

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|,$$

kde  $\deg(v)$  je stupeň vrcholu  $v$  neboli počet hran, ve kterých se nachází.

*Věta:* Nechtě  $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$  je posloupnost přirozených čísel. Předpokládejme, že  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ , a označme symbolem  $D'$  posloupnost  $(d'_1, d'_2, \dots, d'_{n-1})$ , kde

$$d'_i = \begin{cases} d_i & \text{pro } i < n - d_n, \\ d_i - 1 & \text{pro } i \geq n - d_n. \end{cases}$$

Potom  $D$  je skóre grafu právě tehdy, když  $D'$  je skóre grafu.

*Definice:* Uzavřený sled  $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_{m-1}, v_{m-1}, e_m, v_0)$  v grafu  $G$  je *eulerovský*, pokud se v něm každá hrana grafu  $G$  vyskytuje právě jednou a každý vrchol alespoň jednou. Graf se nazývá *eulerovský*, pokud v něm existuje eulerovský sled.

*Věta:* Graf je eulerovský právě tehdy, když neobsahuje žádný vrchol lichého stupně.

---

*Úloha 1:* Dokažte, že graf se všemi stupni sudými neobsahuje most, tedy hranu, jejímž odebráním se zvýší počet komponent.

*Úloha 2:* Ukažte, že každý graf s  $m \geq 2$  hranami má bipartitní podgraf s alespoň  $\frac{m}{2}$  hranami.

*Úloha 3:* Najděte příklad dvou neizomorfních grafů (dvou stromů, stromu a grafu, co není strom) se stejným skóre.

*Úloha 4:* Ověřte, zdali je posloupnost  $(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5)$  skóre grafu. Pokud ano, sestrojte graf, který má takové skóre.

*Úloha 5:* Mějme strom, který má  $l > 0$  listů a  $v$  vnitřních vrcholů, přičemž každý vnitřní vrchol má stupeň 3. Dokažte, že vždy platí  $l = v + 2$ .

*Úloha 6:* Ukažte, že pro každou kostru  $K$  grafu  $G$  a hranu  $e \in E_G \setminus E_K$  existují dvě hrany kostry  $e'$  a  $e''$  takové, že jak  $(K \setminus e') \cup e$  tak  $(K \setminus e'') \cup e$  jsou opět kostry grafu  $G$ .

*Úloha 7:* Určete počet koster grafu  $K_{2,n}$ .